حساب التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما



تأليف

صادق عبد العزيز مهدي

كلية التربية- الجامعة المستنصرية

٢٠٠٨

الجامعة المستنصرية

كلية التربية

حساب التفاضل التكامل وتطبيقاتهما



تاليف

صادق عبد العزيز مهدي

الجامعة المستنصرية
كلية التربية

حساب التفاضل التكامل وتطبيقاتهما

تاليف

صادق عبد العزيز مهدي

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
قائمة المحتويات	أ
المقدمة	د
الفصل الأول : الدالة	1
1-1 المجموعات	1
2-1 الحدوديات	7
3-1 المتباينات	10
4-1 مفهوم الدالة والعمليات على الدوال	17
5-1 الخط المستقيم	22
6-1 الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية	28
تمارين على الفصل الأول	33
الفصل الثاني : الغايات والاستمرارية	34
1-2 غاية متغير	34
2-2 غاية الدالة	37
3-2 مبرهنات أساسية في حساب الغايات	43
4-2 الغايات من جانب واحد	49
5-2 الغايات اللانهائية للدوال	53
6-2 تمارين محلولة عن الغايات	58
7-2 استمرارية الدوال	64
8-2 مبرهنة القيمة الوسطى	63
تمارين على الفصل الثاني	69
الفصل الثالث : الاشتقاق	73
1-3 المشتقة الأولى	73

قائمة المحتويات

الموضوع	الصفحة
قائمة المحتويات	أ
المقدمة	د
الفصل الأول : الدالة	1
1-1 المجموعات	1
1-2 الحدوديات	7
1-3 المتباينات	10
1-4 مفهوم الدالة والعمليات على الدوال	17
1-5 الخط المستقيم	22
1-6 الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية	28
تمارين على الفصل الأول	33
الفصل الثاني : الغايات والاستمرارية	34
2-1 غاية متغير	34
2-2 غاية الدالة	37
2-3 مبرهنات أساسية في حساب الغايات	43
2-4 الغايات من جانب واحد	49
2-5 الغايات اللانهائية للدوال	53
2-6 تمارين محلولة عن الغايات	58
2-7 استمرارية الدوال	64
2-8 مبرهنة القيمة الوسطى	63
تمارين على الفصل الثاني	69
الفصل الثالث : الاشتقاق	73
3-1 المشتقة الأولى	73

الموضوع الصفحة

2-3 المشتقة من اليمين ومن اليسار 81

3-3 بعض قوانين الاشتقاق 82

4-3 الاشتقاق على فترة 85

5-3 اشتقاق الدوال المركبة (قاعدة السلسلة) 87

6-3 اشتقاق معكوس دالة 90

7-3 اشتقاق الدوال الأسية 91

8-3 اشتقاق الدوال اللوغاريتمية 93

9-3 اشتقاق الدوال الضمنية 95

10-3 المشتقات من مراتب عليا 97

11-3 المشتقات المتتابعة لحاصل ضرب اقترانين (قانون ليبنز) 99

12-3 الدالة وربطها بالمشتقة 101

تمارين على الفصل الثالث 104

الفصل الرابع : تطبيقات الاشتقاق 111

أولاً : تطبيقات الاشتقاق في دراسة الدوال 111

4 -1 مبرهنات فيرما و رول و لاغرانج 111

4 -2 دور الاشتقاق في دراسة تزايد وتناقص اقتران 116

4 -3 دور الاشتقاق في دراسة القيم القصوى للاقترانات 119

4 -4 دور الاشتقاق في دراسة التقعر والانعطاف 133

4 -5 دور الاشتقاق في حساب الغاياتغير المحددة 137

4 -6 رسم منحنيات الدوال 142

تمارين 155

ثانيا : التطبيقات العملية والاقتصادية للاشتقاق 159

4 -7 إيجاد القيمة التقريبية لجذور معادلة من الشكل $f(x) = 0$

(تقريب نيوتن – رافسون) 159

4 -8 المشتقة كمعدل في التغير وتطبيقاتها 162

الموضوع	الصفحة
4 -9 مسائل القيم القصوى الاقتصادية	168
تمارين على الفصل الرابع	169
الفصل الخامس : التكامل وتطبيقاته	**173**
5-1 مفهوم التكامل غير المحدود	173
5-2 مفهوم التكامل المحدود	176
5-3 التكامل بالتعويض	178
5-4 التكامل بالأجزاء	181
5-5 التكامل بالكسور الجزئية	183
5-6 تطبيقات التكامل على المساحات	188
5-7 تطبيقات اقتصادية على التكامل	194
تمارين على الفصل الخامس	200
قائمة المصطلحات	**202**
المصادر	**210**

بسم الله الرحمن الرحيم



المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد وعلى آله الطيبين الطاهرين وصحبه الغر الميامين .

في هذا الكتاب محاولة لتلبية حاجة طلبة كليات التربية ،والعلوم ، والهندسة ،والإدارة والاقتصاد للمبادئ الأساسية في الرياضيات ، فهو يغطي الأفكار الأساسية لمثل هذه التخصصات ، وقد حرصت على أن تعزز مادة الكتاب المهارات الأساسية في الدوال والتفاضل والتكامل ، وتوضيح التطبيقات المتنوعة لهذه الموضوعات .

لقد تمت معالجة موضوعات هذا الكتاب بأسلوب علمي مبسط دقيق ، ولهذا تم إعطاء براهين بعض النظريات استكمالا لموضوعات الكتاب، وإثراءً لمادته، زيادة على الاهتمام بكثرة الأمثلة وتنوعها، والعناية بالتمارين التي تتدرج بين السهولة والصعوبة لضمان تطبيق النظريات بتفصيلاتها كافة ، وإعطاء الطلبة فرصة كافية لتطبيق هذه الموضوعات كل حسب اختصاصه .

لقد تم تقسيم الكتاب إلى خمسة فصول: عالج **الفصل الاول** موضوعات تمهيدية شملت المجموعات والمتباينات والقيم المطلقة والدوال، ومن أبرزالدوال التي تمت معالجتها: الدوال الخطية والحدوديات والدوال الأسية واللوغاريتمية . واهتم **الفصل الثاني** بموضوعي الغايات والاستمرارية. وكان الاشتقاق هو موضوع **الفصل الثالث** ، إذ تم تناول مفهوم الاشتقاق وخواص المشتقة وقوانين الاشتقاق للدوال الواردة في الفصل الأول .وكانت تطبيقات الاشتقاق مادة **الفصل الرابع** ،ومن هذه التطبيقات: المعدلات الزمنية المرتبطة ، ومسائل القيم القصوى بالإضافة إلى استخدام المشتقات في رسم المنحنيات، وحل مسائل اقتصادية، وتناول **الفصل الخامس** موضوع التكامل وتطبيقاته إذ تم التطرق الى مفهوم التكامل وخواصه وطرق التكامل وتطبيقاته في مسائل متنوعة .

وفي الفصول كلها تمت معالجة الموضوعات من جميع جوانبها بأسلوب واضح وبسيط ودقيق ، وأسال الله تعالى أن يكون الكتاب نافعاً ،ومن الله التوفيق .

صادق عبد العزيز مهدي

بغداد / تموز- 2007

الفصل الأول

الدوال

الفصل الأول

الدوال Functions

1 - 1 المجموعات Sets

لقد أصبحت المجموعات من المصطلحات المهمة للتعبير عن الكثير من الحقائق الرياضية، لهذا سنقدم بعضاً من مفاهيم المجموعات في هذا البند، فالمجموعة هي تجمع من العناصر تربطها صفة مميزة بحيث أن جميع العناصر في المجموعة تتصف بتلك الصفة ، وأي عنصر لا يتصف بتلك الصفة لن يكون عنصراً في تلك المجموعة ،وهنالك في حياتنا اليومية أمثلة كثيرة لمفهوم المجموعة منها مجموعة أشهر السنة الهجرية ، مجموعة طلبة قسم الرياضيات في كلية التربية الجامعة المستنصرية للعام 1995 / 1996 ، مجموعة لاعبي كرة القدم العراقي وهكذا. وسنضع عناصر المجموعة ضمن قوسين من النوع {} ، تفصل بين كل عنصر وآخر فاصلة، وسوف نرمز للمجموعة بالحروف اللاتينية الكبيرة .

مثال

1 • $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية وهي مجموعة غير منتهية لهذا وضعنا النقاط الثلاث للدلالة على استمرار الأعداد على نفس النمط .

2 • $Z^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة وهي أيضا غير منتهية حيث لها بداية ولا نهاية لها لهذا وضعت نقاطا في الطرف الأيسر للدلالة على استمرار العناصر على نفس النمط هبوطاً.

3 • $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ تمثل مجموعة الأرقام في النظام العددي العشري.

4 • Y = { الأحد، الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء، الخميس، الجمعة، السبت} تمثل مجموعة أيام الأسبوع .

إن الأسلوب المتبع للدلالة على المجموعة في المثال أعلاه اعتمد ذكر جميع العناصر إذا كانت المجموعة منتهية كما هو الحال في المجموعتين X و Y ، أو بذكر بعض العناصر مع نقاط تدل على الاستمرارية إذا كانت المجموعة غير منتهية كما هو الحال في المجموعة Z^- , N. وهنالك أسلوب آخر للدلالة على المجموعة وذلك عن طريق ذكر الصفة المميزة لعناصر المجموعة. ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي .

مثال

1 • $X = \{ x : x$ عدد أولي فردي $\}$

وتقرأ: " المجموعة التي عناصرها x بحيث ان x عدد أولي فردي وواضح ان العناصر التي تحقق هذا الشرط هي $X = \{1,3,5,7,11, 13 ,....\}$.

2 • مجموعة الأعداد النسبية Q والتي تعرف كما يلي :

$$Q = \{ \frac{m}{n} : m \text{ عدد صحيح و } n \neq 0 \}$$

إذا كان x عنصرا في المجموعة X فإننا نرمز لذلك على النحو $x \in X$ ونقول ان x **ينتمي** إلى X .

مثال :

إذا كانت $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ فإن $5 \in X$ و $7 \in X$. ولكن 6 **لا تنتمي** إلى X لهذا نعبر عن ذلك على الصورة $6 \notin X$ وكذلك $2 \notin X$.

تعريف 1-1

إذا كانت X , Y مجموعتين فإننا نقول إن X **محتواة** في Y إذا احتوت المجموعة Y جميع عناصر المجموعة X ونرمز لذلك على النحو $X \subseteq Y$. أي أن $X \subseteq Y$ إذا تحقق الشرط التالي :

إذا كانت $x \in X$ فإن $x \in Y$ (وكذلك نقول أن X **مجموعة جزئية** من Y)

مثال :

لتكن $X = \{1, 3, 5, 7, 9,10,11\}$ ، $Y = \{ 1, 5\}$ ، $Z = \{ 1, 7, 6, 9\}$

فإن $Y \subseteq X$.

وذلك لأن كل عنصر في Y هو عنصر في X ولكن Z ليست محتواة في X ونرمز لذلك على النحو $Z \not\subseteq X$ وذلك لأن $6 \in Z$ ولكن $6 \notin X$.

تعريف 2-1

إذا كانت X, Y مجموعتين فإننا نقول إن X تساوي Y ونرمز لذلك على الصورة $X = Y$ إذا تحقق الشرطان التاليان $X \subseteq Y$ وكذلك $Y \subseteq X$ ، أي أن X ، Y تحتويان نفس العناصر .

مثال :

إذا كانت $X = \{6, 8\}$

$$Y = \{ x : (x-6) (x-8) = 0 , \text{ عدد صحيح } x\}$$

$Z = \{ x : (x-3)(x+2) = 0 ,$ عدد صحيح $x\}$

فإن $X = Y$ لأنهما تحتويان نفس العناصر بينما $X \neq Z$ وذلك لأن $-2 \in Z$ ولكن

$-2 \notin X$ عند الحديث عن المجموعات نفترض دوما أن هنالك مجموعة إطار عام بحيث تكون المجموعات التي نتحدث عنها هي مجموعات جزئية من مجموعة الإطار والتي تسمى المجموعة الكلية (أو الشاملة Universal set) . ولتوضيح هذه الفكرة نأخذ المثال التالي:

مثال :

إذا كانت $X = \{ x \in N : (x-1)(x+4) = 0\}$ ، فإن $1 \in X$ ولكن

$-4 \notin X$ وذلك لأن X كما هي معرفة ، تشترط أن تكون عناصرها أعدادا طبيعية أي أن الإطار الذي تعرف فيه X هو إطار الأعداد الطبيعية .

تعريف 1- 3 (العمليات على المجموعات Operations On Sets)

إذا كانت X , Y مجموعتين جزئيتين من المجموعة الشاملة U فإن :

1 • $X \cap Y$ (X تقاطع Y) مجموعة تعرف على النحو:

$X \cap Y = \{ x \in U : x \in X$ و $x \in Y \}$

أي أنها مجموعة العناصر المشتركة بين X و Y

2 • $X \cup Y$ (X اتحاد Y) مجموعة تعرف على النحو :

$X \cup Y = \{ x \in U: x \in X$ أو $x \in Y\}$

أي أنها مجموعة العناصر الموجودة في X أو Y أو في كليهما .

3 • $X - Y$ (X عدا Y) مجموعة تعرف على النحو :

$X - Y = \{ x \in U : x \in X$ و $x \notin Y\}$

أي أنها مجموعة العناصر الموجودة في X وغير موجودة في Y (وتكتب في بعض الاحيان على الشكل $X \setminus Y$) .

4 • $\overline{X}$ (متممة X) مجموعة تعرف على النحو :

$\overline{X} = U - X = \{ x \in U: x \notin X \}$

أي أنها مجموعة العناصر الموجودة في U ولكنها ليست في X .

ولتوضيح هذا التعريف نأخذ المثال التالي :

مثال

لتكن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8\}$ ، $X= \{ 1, 7, 4\}$ ، $Y = \{ 7, 5\}$ ، $Z = \{ 1, 4\}$ فإن :

1 • $X \cap Y = \{7\}$ 2 • $X \cup Y = \{ 1, 4, 5,7\}$

لاحظ أننا لا نكرر العنصر في المجموعة أكثر من مرة واحدة.

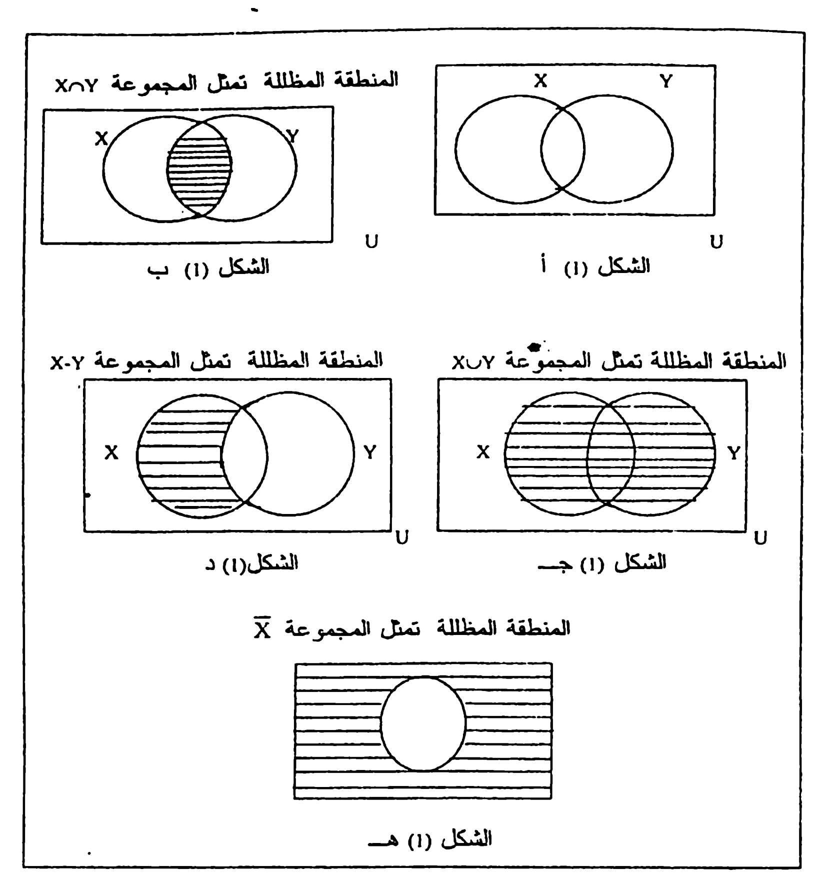
3 • $X - Y = \{ 1, 4\}$, $Y-X = \{5\}$ 4 • $\overline{X} = \{0, 2,3,5,6,8\}$,

$\overline{Y} = \{0, 1, 2,3, 4,6,8\}$

5 • $Y \cap Z = \{ \ \}$

لاحظ عدم وجود عناصر في المجموعة $Y \cap Z$ لهذا نرمز لها بالرمز { } ومثـل هـذه المجموعة تسمى **مجموعة خالية** (Empty set) ونرمز لها أيضاً بالرمز ϕ .

لقد اقترح فن (Venn) مخططاً لتمثيل المجموعات بالرسم وذلك بان تمثل المجموعة الشاملة بمستطيل وترسم المجموعات الأخرى بداخله على شكل دوائر تقريباً، وباستخدام هذا الأسلوب نمثل المجموعات المعطاة في تعريف (1-3) كما في الشكل (1) .



الشكل (1)

هنالك عملية أخرى ، في غاية الأهمية ، على المجموعات ألا وهي الضرب الديكارتي والذي يعرف كما يلي :

تعريف 1-4

إذا كانت X و Y مجموعتين فإن حاصل ضربهما الديكارتي والذي يرمز له بالرمز $X \times Y$ يعرف على النحو التالي :

$$X \times Y = \{ (x,y): x \in X \quad \text{و} \quad y \in Y \}$$

أي أن $X \times Y$ هي مجموعة من الأزواج المرتبة (x,y) حيث المسقط الأول x ينتمي إلى المجموعة X والمسقط الثاني y ينتمي إلى المجموعة الثانية Y .

مثال

إذا كانت $X = \{1,2,3\}$ ، $Y = \{1, 7\}$ فإن :

$X \times Y = \{ (1,1), (1,7), (2,1), (2,7), (3,1), (3,7)\}$

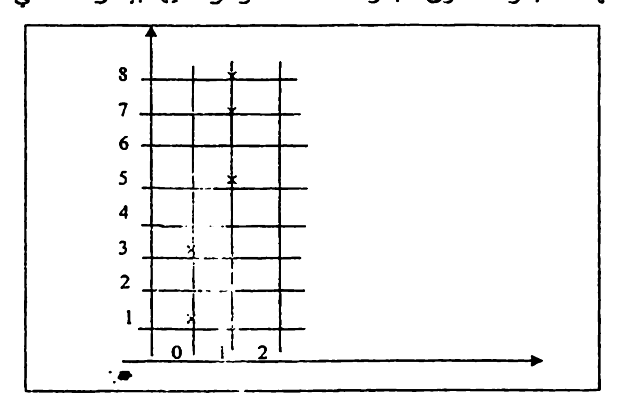
$Y \times X = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (7,1), (7,2), (7,3)\}$

لاحظ أن الزوج المرتب $(2 ,1) \neq (1, 2)$.

تمثل المجموعة $X \times Y$ بيانياً في المستوي الديكارتي وهو مستوى يتحدد بمحورين درجت العادة على أن يرسم الأول منهما أفقياً وتمثل عليه المساقط الأولى ويرسم الثاني عمودياً على المحور الأول وتمثل عليه المساقط الثانية ، وتمثل عناصر $X \times Y$ بتقاطع المستقيمات المرسومة من مساقط عناصرها موازية للمحورين ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال

إذا كانت $X \times Y = \{ (1,1), (1,3), (2,5), (2,7), (2,8) \}$ فإن التمثيل البياني لهذه المجموعة تكون مجموعة النقاط المؤشر عليها بإشارة "x" في الشكل (2) .



الشكل (2)

تمارين

1 • أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة . برر إجابتك :

a • $2 \in \{ 2, 3, -3, 5\}$ b • $-8 \in \{ 7, 5, 9, 8\}$

c • $\{1, -1, 2\} \subset \{1,3, 5, 2,6\}$

d • $\{2, 3, 7,8\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9\}$

e • $\{1,7,3,5\} = \{3,1,5,7\}$ f • $\{1,3,7\} = \{1,4,6\}$

2 • إذا كانت

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X = \{1\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$, $Z = \{2, 4\}$

فأوجد :

a • $\overline{A}$ b • $X \cup Y$ c • $X - Y$

d • $X \cap Y$

e • $\overline{Y}$ f • $X \cup Z$ g • $Z - Y$

h • $X \cap Y$

i • $\overline{C}$ j • $Y \cup Z$ k • $Y - X$

l • $Y \cap Z$

3 • مثل المجموعات الواردة في سؤال (2) أعلاه بأشكال فن (Venn) .

4 • إذا كانت $X = \{-6, 4, 1\}$, $Y = \{3, -4, 5, 1\}$

فأوجد $X \times X$, $Y \times X$, $X \times Y$, $Y \times Y$

ثم مثل كلا من المجموعات الناتجة بيانيا في المستوي الديكارتي.

2-1 الحدوديات Polynomials

تصادفنا في حياتنا كثير من الكميات القابلة للقياس مثل دخل الانسان ، إنتاج التمر في عام محدد، أسعار السلع في السوق ، الكميات المعروضة من السلع،...... الخ.

ومن هذه الكميات ما يبقى ثابتاً مهما تغيرت ظروف المسألة التي يدخل فيها كسرعة الضوء وعدد أيام الأسبوع والنسبة بين محيط الدائرة ونصف قطرها . مثل هذه الكميات تسمى **ثوابت** ولكن اغلب الكميات القابلة للقياس تتغير من ظرف لآخر . فمثلا الكمية المعروضة من سلعة تتغير من يوم لأخر ، ووزن الطفل يتغير من يوم لآخر ، تسمى مثل هذه الكميات **متغيرات** .

ومن هذه المتغيرات ما تترابط بشكل ما حيث يتغير أحدها تبعاً للآخر فالزمن يمضي مستقلا عن أعمار الأشخاص لهذا يسمى الزمن **متغيراً مستقلا** ويسمى العمر **متغيراً تابعاً** للزمن.

نستعمل الرموز للتعبير عن المتغيرات، ومن الرموز الشائعة الاستعمال x, y, z ولكن هنالك رموز خاصة تستعمل لحالات محددة. تسمى العلاقة التي تربط المتغيرات معا قانونا.

مثال

1 • قانون مساحة الدائرة التي نصف قطرها r هو $A = \pi r^2$ حيث A ترمز إلى مساحة الدائرة.

2 • قانون الربح البسيط يعطى على النحو التالي :

إذا وضع مبلغ من المال قدره x في بنك بربح بسيط مقداره $p\ \%$ في السنة فإن الربح y الناتج عن وضع هذا المبلغ لمدة عام يعطى بالقانون :

$$y = \frac{p}{100}x$$

3 • قانون الربح المركب ويعطى على النحو التالي :

إذا وضع مبلغ من المال قدره x في بنك بربح مركب قدره $p\%$ في السنة لمدة n من السنوات فإن جملة هذا المبلغ y بعد n من السنوات تعطى بالقانون

$$y = x\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

ومن الناحية الرياضية نستطيع أن نضع صياغة لأنواع مختلفة من القوانين . ولتقديم هذا الموضوع نذكر المثال التالي :

مثال

التعبير $3x^2 + 5x + 7$ هو مقدار جبري مكون من ثلاثة حدود هي $3x^2$, 7 , $5x$ ويسمى العدد 3 معامل x^2 ، والعدد 5 معامل x كما يسمى الحد الخالي من x وهو هنا 7 بالحد المطلق كما يسمى المقدار نفسه $3x^2 + 5x + 7$ عبارة تربيعية لأن أعلى أس للمتغير x فيها هو 2 .

ولما كانت كل أسس x في هذه العبارة أسس صحيحة موجبة فإنها تسمى **حدودية أو كثيرة حدود** .

تعريف 1-2-1

يسمى المقدار $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

كثيرة حدود (حدودية) من الدرجة n حيث $a_n \neq 0$ ، وجميع أسس x أعداد طبيعية والمعاملات $a_0, a_1, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية ، وحيث أن x تأخذ قيما من الأعداد الحقيقية.

ومن الجدير بالملاحظة ان مجال الدالة الحدودي هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

مثال

a • $P(x) = 4x^6 - 2x^2 - 9$

كثيرة حدود من الدرجة السادسة

b • $P(x) = 1 - 7x + 3x^3 + 5x^7$

كثيرة حدود من الدرجة السابعة

c • $P(x) = x^5 + 7x^{-3} + 4$

ليست كثيرة حدود لأن إحدى أسس x عدد صحيح سالب.

مثال

إذا كانت $P(x) = x^2 - 3x + 7$ فإن :

$$P(0) = 0^2 - 3(0) + 7 = 7$$

و

$$P(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 7 = 1 + 3 + 7 = 11$$

تسمى $P(0)$ قيمة الحدودية عندما $x = 0$ وكذلك $P(-1)$ تسمى قيمة الحدونية عندما $x = -1$

مثال

أوجد قيمة x بحيث تكون $P(x) = 0$ إذا كانت $P(x) = 3x + 7$

الحل:

ضع $0 = 3x + 7$ لتجد ان $x = -\frac{7}{3}$

يسمى المقدار $-\frac{7}{3}$ صفر الحدودية $P(x)$ كما يسمى أيضاً جذر المعادلة $P(x) = 0$

مثال

أوجد أصفار الحدودية $P(x) = 2x^2 + x - 3$

الحل :

اجعل $P(x) = 0$ نتحصل على $0 = 2x^2 + x - 3 = (2x+3)(x-1)$

ومنها $x - 1 = 0$ أو $2x + 3 = 0$ أي $x = 1$ أو $x = -\frac{3}{2}$

ملاحظة 1 -2 – 2

تسمى الحدودية $P(x) = c$ حيث c مقدار ثابت، حدودية من الدرجة صفر وذلك لأن $x^0 = 1$

تمارين

1 • إعط مثالا لكثيرة حدود من الدرجة :

أ • السادسة ب • الرابعة جـ • الثانية د• الأولى

2 • أي مما يلي كثيرة حدود (وما درجتها إن كانت كثيرة حدود)

a • $P(x) = 3x^2 - 5x + 7$ b • $P(x) = \frac{1}{x} - 7x^3 + 4$

c • $P(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ d • $P(x) = \frac{1}{3}$

3 • أوجد أصفار الحدوديات التالية

a • $P(x) = (x-4)(1-2x)$ b • $P(x) = 5x - 2$

c • $P(x) = (x^2-16)(x+1)$

3 - 1 المتباينات inequalities

من خواص الأعداد الحقيقية انه إذا كان x , y عددين حقيقيين فإما أن تكون x مساوية لــ y أي $x = y$ أو أن x مختلفة عن y أي $x \neq y$. وهذا الاختلاف يعني تباين x و y وهذا التباين يعني كون x أكبر من y أي $x > y$ أو x أقل من y أي $x < y$.

إن الجمل التي تحتوي الإشارة = تسمى متساويات أو معادلات أما الجمل التي تحتوي واحدة من الإشارات $<$ ، $>$ ، $\geq$ ، $\leq$ فتسمى متباينات

مثال

1 • $x+8 < 2x+9$ متباينة

2 • $x^2-6x+1 \geq 0$ متباينة

3 • $x^2+2x \leq 5$ متباينة

4 • $3x-x^2 > 3$ متباينة

5 • $x-7=2$ معادلة

6 • $x^2-x-3=0$ معادلة

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R والتي تسمى الفترات (**Intervals**). وهنالك أربعة أنواع من الفترات تعرف كما يلي :

1 • $[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

وتسمى فترة مغلقة

2 • $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$

وتسمى فترة مفتوحة وقد يكتبها البعض $]a,b[$

3 • $(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$

وتسمى فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة) وقد يكتبها البعض $]a,b]$

4 • $[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

وتسمى فترة نصف مفتوحة (او نصف مغلقة) وقد يكتبها البعض $[a,b[$

ملاحظة 1-3-1

1 • الرمزان ∞ ، $-\infty$ يمثلان رمز الغير منته بالاتجاه الموجب و السالب .

2 • سوف نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز **R** . وهي تمثل الفترة $(-\infty, \infty)$ أما مجموعة الأعداد الموجبة فهي الفترة $(0, \infty)$ ويرمز لها بالرمز $\mathbf{R}^+$ إما مجموعة الأعداد السالبة والتي يرمز لها بالرمز $\mathbf{R}^-$ فهي الفترة $(-\infty, 0)$.

3 • إذا كانت X مجموعة جزئية من R وأمكن إيجاد عدد حقيقي m بحيث أن $x \geq m$ لكل $x \in X$ فإن X تسمى مجموعة **محدودة من الأسفل** ، وإذا أمكن إيجاد عدد حقيقي M بحيث أن $x \leq M$ لكل $x \in X$ فإن X تسمى

مجموعة **محدودة من الأعلى** . وتكون المجموعة محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل وخلاف ذلك تكون المجموعة غير محدودة .

4 • تكون الفترة (a,b) أو $[a, b)$ أو $(a, b]$ أو $[a, b]$ فترة محدودة إذا كانت كل من a, b أعدادا حقيقية .

5 • إذا كان أحد طرفي الفترة هو $-\infty$ أو $+\infty$ فإنها تسمى فترة غير محدودة .

مثال

إذا كانت $X = [4,6]$, $Y = (3, 7)$, $Z = [3, 8)$, $D = (2,5]$

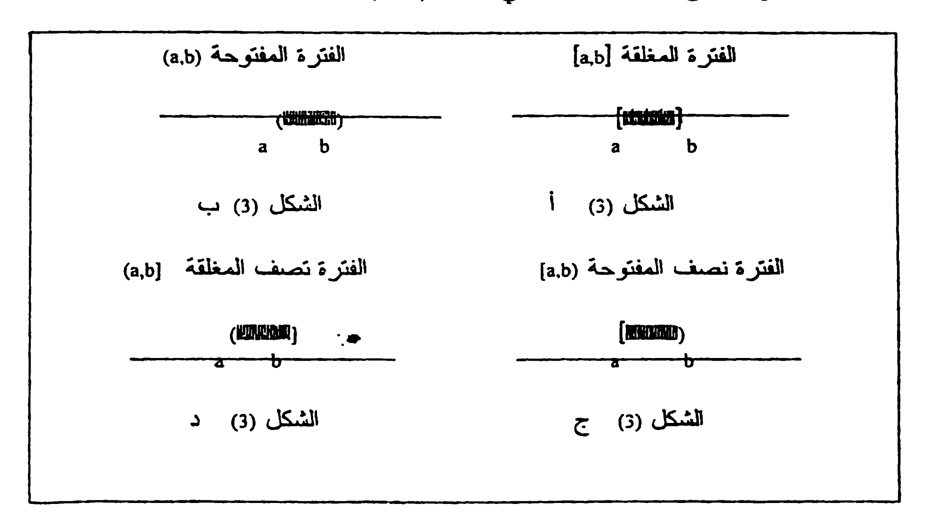
فإن:

a • $X \cap Y = [4,6]$, $Y \cap Z = (3,7]$, $Z \cap D = [3,5]$

b • $X \cup Y = (3,7)$, $Z \cup D = (2,8)$

ملاحظة 1- 3 – 2

تمثل الفترات على خط الأعداد كما في الشكل (3)



الشكل (3)

إن حل المتباينة يعني إيجاد مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المتباينة صحيحة.

مثال

أ • العدد 1 هو حل للمتباينة $x \le 6$ وذلك لأن $1 \le 6$ عبارة صحيحة، بينما العـــدد 7 ليس حلاً لهذه المتباينة لأن $7 \le 6$ عبارة خاطئة .

وحتى نحل المتباينات نحتاج إلى المبرهنة التالية التي تحتوي بعض خواص المتباينات .

مبرهنة 1 -3 - 3

a • $x^2 \ge 0 , \forall x \in R$

أي لكل عدد حقيقي x يكون مربعه عدداً غير سالب .

b • $x<y$ و $y < z \Rightarrow x < z$

(خاصية التعدي)

c • $x <y \Rightarrow x+z < y+z \quad , \forall z \in R$

d • $x<y \Rightarrow x-z < y-z \quad ,\forall z \in R$

$x < y$ و $z >0 \Rightarrow xz < yz$

$x < y$ و $z <0 \Rightarrow xz > yz$

e • $0< x < y \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$

مثال

حل المتباينة $4x + 7 \ge 2x -3$.

الحل :

لاحظ ان $4x + 7 \ge 2x -3$ تكافئ $4x +7-7 \ge 2x-3-7$ (اضـــافة نظير 7)

أي $4x \ge 2x -10$ وهذه تكافئ $4x - 2x \ge 2x -10 -2x$ (اضافة نظير 2x)

أي $2x \ge -10$ وهذه تكافئ $\frac{1}{2}(2x)\ge\frac{1}{2}(-10)$ (بالضرب في $\frac{1}{2}$)

أي $x \ge -5$

إذن مجموعة الحل لهذه المتباينة هي مجموعة جميع الأعداد الحقيقية التي هي أكبر من أو تساوي -5 ونعبر عن ذلك بالفترة $[-5, \infty)$.

مثال

حل المتباينة (المتباينات) $-5 < 3x - 2 < 1$

الحل:

لاحظ ان $-5 < 3x-2 < 1$ تكافئ $-5+2 < 3x-2 + 2 < 1+2$

أي $-3 < 3x < 3$ وهذه تكافئ $\frac{1}{3}(-3) < \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(3)$ أي $-1 < x <$

1 إذن مجموعة الحل هي الفترة $(-1, 1)$.

مثال

. حل المتباينة $x^2 + x - 20 > 0$

الحل :

لاحظ أن $x^2 + x - 20 > 0$ تكافئ $(x-4)(x+5) > 0$

ومن المعلوم أن حاصل ضرب مقدارين يكون موجباً إذا كان :

أ • كل منهما موجب أي $x - 4 > 0$ و $x + 5 > 0$

ب • أو كل منهما سالب ، أي $x - 4 < 0$ و $x + 5 < 0$

والحالة (أ) تكافئ $x > -5$ و $x > 4$ وبتمثيل ذلك على خط الأعداد كما في الشكل (4)

$x > -5$ $x > 4$

-5 4

الشكل (4)

نجد أن الحل في هذه الحالة هو تقاطع المنطقتين ، أي الفترة $(4, \infty)$

أما الحالة (ب) فتكافئ $x < -5$ و $x < 4$ وبتمثيلها على خط الأعداد كما في الشكل (5)

-5 4

الشكل (5)

نجد أن الحل في هذه الحالة هو تقاطع المنطقتين، أي الفترة $(-\infty, -5)$

وبما أن الحالتين مربوطتان بالأداة (أو) فإن حل المتباينة الأصلية هو اتحاد الحلين في الحالتين والذي يمثل كما في الشكل (6)

-5 4

الشكل (6)

أي أن الحل هو مجموعة الأعداد الحقيقية (كل الخط) ما عدا [-5,4] أي أن الحل هو $R - [-5,4]$.

تستخدم المتباينات في تعريف بعض المقادير الخاصة مثل القيمة المطلقة والتي تعطى بالتعريف التالي :

تعريف 1- 3 – 4

إذا كانت x عدداً حقيقيا فإن القيمة المطلقة للمقدار x والتي يرمز لها بالرمز |x| تعني القيمة دون الإشارة ، أي أن

$$|x| = \begin{cases} x & \text{عندما } x \geq 0 \\ -x & \text{عندما } x < 0 \end{cases}$$

لاحظ أن مجال الدالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ هو R ومداه هو R^+ .

مثال

a • $|6| = 6$ d • $|3.8| = 3.8$ b • $|-2| = 2$

e • $|-3.7| = 3.7$

c • $|0| = 0$

مبرهنة 1- 3 - 5

a • $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ حيث $a \geq 0$

b • $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ أو $x < -a$, حيث $a \geq 0$

c • $|x+y| \leq |x| + |y|$

مثال

حل المتباينة $|3x-5| < 2$.

الحل:

لاحظ أن $|3x-5| < 2$ تكافئ $-2 < 3x-5 < 2$

وتكافئ $5-2 < 3x-5+5 < 2+5$ ، أي $3 < 3x < 7$

وهذه تكافئ $\frac{1}{3}(3) < \frac{1}{3}(3x) < \frac{1}{3}(7)$ أي $1 < x < \frac{7}{3}$

إذن مجموعة الحل هي الفترة $(1, \frac{7}{3})$

تمارين

1 • أوجد قيمة

a • $|2.8|$ b • $|-2.8|$ c • $|\frac{7}{5}|$ d • $|-\frac{7}{5}|$

2 • إذا كان

$X = [2,4]$, $Y = [3,5]$, $Z = (0,3)$

فأوجد

a • $X - Y$ b • $X \cap Y$ c • $X \cup Y$

d • $Y \cap Z$

e • $Y - X$ f • $Y \cup Z$

3 • حل المتباينات

a • $3x - 7 > 2 - 4x$ b • $x^2 - 9 \geq 0$ c • $x(x^2+3) > 0$

d • $x(x^2 - 5x + 6) > 0$ e • $\frac{4x+5}{x+2} \geq 3$ f • $|x-2| \leq 1$

g • $|3 - 2x| \geq 5$

4 -1 مفهوم الدالة والعمليات على الدوال

تعتبر الدالة واحدة من مصطلحات اللغة الرياضية وتكاد تظهر في معظم المسائل الرياضية وهذا ما سنتعرض له في هذا البند .

تعريف 1 - 4 - 1

إذا كانت X و Y مجموعتين فإن أية مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$ تسمى علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y

مثال

إذا كانت $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{4,8,7,12,9\}$ فإن : .

$f_1 = \{(1,4), (1,8), (2,12)\}$

تسمى علاقة من X إلى Y وذلك لأن $f_1 \subset X \times Y$.

من عناصر f_1 نلاحظ أن العدد $1 \in X$ ارتبط بكل من العددين $4, 8 \in Y$ أي للعدد 1 صورتان هما 4 و 8 . بينما العدد $2 \in X$ ارتبط بالعدد $12 \in Y$ أي أن للعدد $2 \in X$ صورة واحدة فقط في Y هي 12 ، كما نلاحظ أن العدد $3 \in X$ ليس له صورة في Y وفق هذه العلاقة لأنه لا يوجد زوج مرتب في f_1 مسقطه الأول 3 .

تعريف 2 - 4 - 1

إذا كانت X و Y مجموعتين وكانت f مجموعة جزئية من $X \times Y$ بحيث يتحقق الشرط التالي:

لكل عنصر $x \in X$ يوجد صورة واحدة فقط $y \in Y$ لهذا العنصر (أي أن $(x,y) \in f$)

فإننا نسمي f دالة من X إلى Y .

مثال

إذا كانت $X = \{1,2,3\}$ و $Y = \{4,8,12,9\}$ فإن :

$f = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$

دالة من X إلى Y وذلك لأن عناصر X هي 1 وصورته 4 وحيدة في Y ، 2 وصورته 4 وحيدة في Y ، 3 وصورته 12 وحيدة في Y .

لاحظ أنه لا مانع من أن يوجد أكثر من عنصر في X له الصورة نفسها في Y .

تعريف 1 - 4 - 3

إذا كانت f دالة من X إلى Y فإننا نعبر عن ذلك على الصورة $f : X \rightarrow Y$ ، وتسمى X مجال الدالة ، Y مجاله المقابل وتسمى مجموعة الصور لعناصر X مدى الدالة f .

تعريف 1- 4 - 4

إذا كانت $f(x)$ دالة ما فإن أكبر مجال للدالة f هو جميع قيم x التي يكون للدالة عندها قيماً حقيقية.

مثال

إذا كانت $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,6,8,9\}$

وكان $f = \{(1,1), (3,6), (5,9)\}$ فإن مجال f هو X ومجاله المقابل هو Y ومداه هو $\{1,6,9\}$. إن العناصر في مجال الدالة ترتبط بصورها في مجاله المقابل وفق قاعدة محددة .

مثال

افرض أن $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ بحيث ان $f(x) = x^2$ ، في هذه الحالة يكون مثلاً $f(0) = 0$ و $f(-5) = 25$ و $f(5) = 25$ ... وهكذا ، وواضح أيضاً أن $0 \geq 0$ $f(x) = x^2$ لكل عدد حقيقي x أي أن مدى الدالة f هو الفترة $[0,\infty)$.

مثال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x^2}$ فإن هذا المقدار لا يكون معرفاً عندما تكون $x = 0$ ، لهذا فإن أكبر مجال للدالة f هو $R - \{0\}$ ويكون مداه الفترة $(0, \infty)$.

مثال

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ فإن هذا المقدار لا يكون معرفاً عندما تكون x سالبة ، لهذا فإن أكبر مجال لهذه الدالة هو $[0, \infty)$.

مثال

إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 7$ فإن هذه الدالة يكون معرفـا لجميـع الأعداد الحقيقية ، لهذا فإن أكبر مجال له هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

وبشكل عام مجال كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

تعريف 1 - 4 - 5

افرض ان $f : R \to R$ و $g : R \to R$

a • $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

تسمى $f + g$ مجموع الدالتين f و g .

b • $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

تسمى $f - g$ الفرق بين الدالتين f و g .

c • $(f.g)(x) = f(x) . g(x)$

تسمى $f.g$ حاصل ضرب الدالتين f و g .

d • $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

بشرط أن $g(x) \neq 0$ ، تسمى $\frac{f}{g}$ خارج قسمة f على g .

e • $(f \circ g) = f(g(x))$

تسمى $g \circ f$ تركيب الدالتين f و g .

f • $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

تسمى f^{-1} معكوس f .

ولتوضيح هذا التعريف نأخذ الأمثلة التالية :

مثال

إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ ، $g(x) = x^2 + 1$ فإن:

1 • $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x+5 + x^2 + 1 = x^2 + 3x + 6$

2 • $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3x+5 - (x^2+1) = -x^2 + 3x + 4$

لاحظ أنه لا مانع من أن يوجد أكثر من عنصر في X له الصورة نفسها في Y .

تعريف 1 - 4 - 3

إذا كانت f دالة من X إلى Y فإننا نعبر عن ذلك على الصورة $f : X \to Y$ ، وتسمى X مجال الدالة ، Y مجاله المقابل وتسمى مجموعة الصور لعناصر X مدى الدالة f .

تعريف 1- 4 - 4

إذا كانت $f(x)$ دالة ما فإن أكبر مجال للدالة f هو جميع قيم x التي يكون للدالة عندها قيماً حقيقية.

مثال

إذا كانت $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{1,6,8,9\}$

وكان $f = \{(1,1), (3,6), (5,9)\}$ فإن مجال f هو X ومجاله المقابل هو Y ومداه هو $\{1,6,9\}$. إن العناصر في مجال الدالة ترتبط بصورها في مجاله المقابل وفق قاعدة محددة .

مثال

افرض أن $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ بحيث ان $f(x) = x^2$ ، في هذه الحالة يكون مثلاً $f(0) = 0$ و $f(-5) = 25$ و $f(5) = 25$ ... وهكذا ، وواضح أيضاً أن $0 \geq f(x) = x^2$ لكل عدد حقيقي x أي أن مدى الدالة f هو الفترة $[0,\infty)$.

مثال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x^2}$ فإن هذا المقدار لا يكون معرفاً عندما تكون $x = 0$ ، لهذا فإن أكبر مجال للدالة f هو $R - \{0\}$ ويكون مداه الفترة $(0, \infty)$.

مثال

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ فإن هذا المقدار لا يكون معرفاً عندما تكون x سالبة ، لهذا فإن أكبر مجال لهذه الدالة هو $[0, \infty)$.

مثال

إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 7$ فإن هذه الدالة يكون معرفاً لجميع الأعداد الحقيقية ، لهذا فإن أكبر مجال له هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

وبشكل عام مجال كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .

تعريف 1 - 4 - 5

افرض ان $f : R \to R$ و $g : R \to R$

a • $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

تسمى $f + g$ مجموع الدالتين f و g .

b • $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

تسمى $f - g$ الفرق بين الدالتين f و g .

c • $(f.g)(x) = f(x) . g(x)$

تسمى $f.g$ حاصل ضرب الدالتين f و g .

d • $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

بشرط أن $g(x) \neq 0$ ، تسمى $\frac{f}{g}$ خارج قسمة f على g .

e • $(f \circ g) = f(g(x))$

تسمى $g \circ f$ تركيب الدالتين f و g .

f • $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

تسمى f^{-1} معكوس f .

ولتوضيح هذا التعريف نأخذ الأمثلة التالية :

مثال

إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ ، $g(x) = x^2 + 1$ فإن:

1 • $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x+5 + x^2 + 1 = x^2 + 3x + 6$

2 • $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 3x+5 - (x^2+1) = -x^2 + 3x + 4$

3 • $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x+5)(x^2+1) = 3x^3 + 3x + + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$

4 • $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$

5 • $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2+1}{3x+5}$

6 • $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = 3(x^2+1) + 5 = 3x^2 + 8$

7 • $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+5) = (3x+5)^2 + 1 = 9x^2 + 30x + 25 + 1$

$= 9x^2 + 30x + 26$

8 • لإيجاد f^{-1} نضع $y = f(x) = 3x + 1$

ثم نضع x بدلالة y على النحو التالي :

$x = \frac{y-5}{3}$

إذن $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{3}$

أي $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$

9 • لإيجاد g^{-1} نضع $y = g(x) = x^2 + 1$

ثم نضع x بدلالة y على النحو التالي :

$x^2 = y - 1$

$x = \pm\sqrt{y-1}$

إذن $g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

أي $g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-1}$

حيث $x - 1 \geq 0$.

ملاحظة 1 - 4 - 6

f^{-1} هو دالة بينما g^{-1} ليس دالة لأنه في حالة f^{-1} لكل عنصر صورة واحدة فقط ، بينما في حالة g^{-1} توجد صورتان لكل عنصر .

تمارين

1 • أي من العلاقات التالية يمثل دالة مــن X إلــى Y حيــث $X=\{1,2,3\}$ و $Y=\{1,3,5\}$

a • $f_1 = \{(1,1), (2,3), (3,5)\}$ b • $f_2 = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$

c • $f_3 = \{(1,1), (1,3), (2,5), (3,3)\}$ d • $f_4 = \{(1,3), (2,5)\}$

2 • أوجد أكبر مجال لكل من الدوال التالية:

a • $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ b • $f(x) = \frac{1}{x-2}$

c • $f(x) = \sqrt{5-x}$ d • $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$

3 • إذا كانت $f(x) = 3x-6$ و $g(x) = 7-x$

فأوجد ما يلي :

a • $(f+g)(x)$ e • $(f \circ g)(x)$

b • $(f-g)(x)$ f • $(g \circ f)(x)$

c • $(f \times g)(x)$ g • $f^{-1}(x)$

d • $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ h • $g^{-1}(x)$

4 • أوجد $f^{-1}(x)$ في كل من الحالات التالية وبين فيما إذا كانت دالـــة أم لا مـــع ذكـــر السبب .

a • $f(x) = 7x - 9$ b • $f(x) = x^3$

c • $f(x) = x^2$

d • $f(x) = \frac{3}{x-5}$ e • $f(x) = 4$

5 • أوجد مدى كل من الدوال التالية :

a • $f(x) = 5x + 3$ b • $f(x) = 7$ c • $f(x) = \frac{1}{x+1}$

d • $f(x) = \frac{1}{x-3}$

e • $f(x) = x^2 + 9$

5 - 1 الخط المستقيم Lines

هنالك نوع خاص من الدوال تسمى دالة الخط المستقيم أو الدالة الخطية وهو دالة من R إلى R قاعدته على الصورة $f(x) = mx + b$ ، حيث m , b عددين حقيقيين معلومين ، تسمى $y = mx + b$ معادلة خط المستقيم .

والسؤال الذي ينشأ الآن هو : لماذا يمثل هذه الدالة خطاً مستقيماً ؟

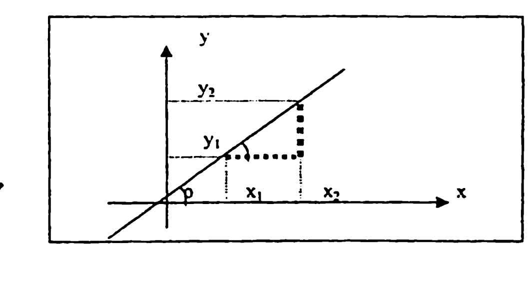
للإجابة عن هذا السؤال نحتاج إلى بعض المفاهيم التي سنطرحها في هذا البند .

تعريف 1- 5 - 1

إذا كانت $X (x_1, y_1)$ ، $Y (x_2, y_2)$ نقطتين في المستوى فإن ميل الخط المستقيم المار من النقطتين X و Y هو :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad x_1 \neq x_2$$

وهذا الميل يعبر عن ظل قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي الموجب.



الشكل (7)

مثال

أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $X (3,5)$ و $Y (-1,2)$.

الحل:

$$m = \frac{5-2}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$$

مبرهنة 1 - 5 - 2

إذا كانت $X(x_1,y_1)$ و $Y(x_2,y_2)$ نقطتين في المستوي فـإن طـول القطعة المستقيمة التي طرفيها X و Y يساوي

$$L = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$$

مثال

أوجد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين $X(1,4)$ و $Y(-2,3)$.

الحل:

$$L = \sqrt{(4-3)^2+(1-(-2))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

بما أن الخط المستقيم يتحدد بمعرفة نقطتين وذلك لأن بقية النقاط الواقعة على الخط تكون على نفس الاستقامة وان الخط المستقيم يصنع زاوية واحدة مع المحور الأفقي الموجب

فإذا أخذنا مثلا أي ثلاث نقاط تحقق المعادلة $y = mx + b$

$$y_1 = mx_1 + b \quad , \quad y_2 = mx_2 + b \quad , \quad y_3 = mx_3 + b$$

فإن ميل الخط المستقيم المار من النقطتين $X(x_1,y_1)$ و $Y(x_2,y_2)$ حيث $x_1 \neq x_2$ هو

$$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{mx_2+b-mx_1-b}{x_2-x_1} = m$$

وبنفس الأسلوب يكون ميل الخط المستقيم المار من النقطتين $Y(x_2,y_2)$ و $Z(x_3,y_3)$ هو $m_2 = m$

أي أن الميل للقطعة XY هو نفس ميل القطعة YZ ولهذا فإن X, Y, Z تقـع علـى استقامة واحدة أي أن المعادلة $y = mx + b$ تمثل خطا مستقيما ميله m .

هذا ويمكن معالجة الموضوع بأسلوب آخر حيث من المعلوم انه إذا كانت X و Y و Z ثلاث نقاط فإنها إما أن تشكل مثلثا أو أن تكون على استقامة واحدة ، وإنها ستكون على استقامة واحدة إذا كان مجموع طولي اقصر قطعتين مساويا طول أكبر قطعة .

والآن إذا أخذنا النقاط الثلاثة X و Y و Z الواردة أعلاه بحيث أن $x_1 < x_2 < x_3$ فإن

$$XY = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

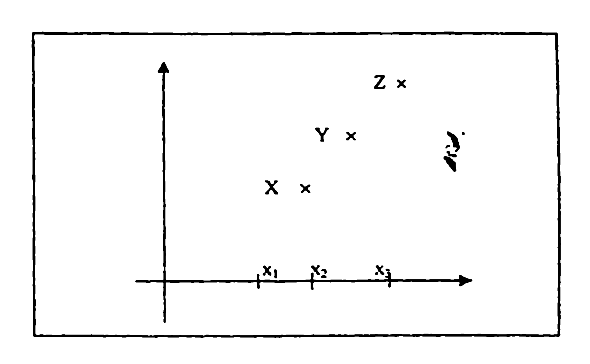
$$= \sqrt{(mx_2 + b - mx_1 - b)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$= \sqrt{m^2(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$= |x_2 - x_1|\sqrt{1+m^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1+m^2}$$

وبالمثل يكون $XZ = |x_3-x_1| \sqrt{1+m^2} = (x_3-x_1)\sqrt{1+m^2}$

ويكون $YZ = |x_3-x_2| \sqrt{1+m^2} = (x_3-x_2)\sqrt{1+m^2}$



الشكل (8)

لاحظ أن :

$$XY + YZ = \sqrt{1+m^2}\,\{(x_2-x_1) + (x_3-x_2)\}$$

$$= \sqrt{1+m^2}\,\{(x_3-x_1)\} = XZ$$

لهذا فإن النقاط الثلاث تقع على استقامة واحدة أي أن المعادلة $y = mx + b$ تمثل معادلة خط مستقيم .

هنالك سؤال آخر لابد من الإجابة عليه وهو كيف يمكن إيجاد معادلة خط مستقيم ؟ بما إن معادلة الخط المستقيم هي $y = mx + b$ إذن لابد من تحديد قيمة كل من m , b ويحتاج ذلك إلى توفر شرطين .

وقد لاحظنا في وقت سابق إن m تمثل ميل الخط المستقيم . ومن الواضح انه عندما تكون $x = 0$ فإن $y = m(0) + b = b$.

أي أن $(0,b)$ نقطة على الخط المستقيم ولما كان المسقط الأول 0 فإن b تمثل طول المقطع من المحور الرأسي الذي يقطعه الخط المستقيم .

وفيما يلي بعض الأمثلة التي توضح كيفية إيجاد معادلة الخط المستقيم تحت شرطين معلومين.

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 5 ومقطعه من المحور الرأسي -4 .

الحل:

المعادلة العامة هي $y = mx + b$ حيث m الميل ، b المقطع من المحور الرأسي ، إذن $y = 5x - 4$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,0)$ و $(0, 1)$.

الحل :

$y = mx + b$ وبما أن المستقيم يمر بالنقطة $(0,1)$ إذن

$$1 = m(0) + b \Rightarrow b = 1$$

وان المستقيم يمر بالنقطة $(1,0)$ إذن

$$0 = m(1) + b \Rightarrow m = -b = -1$$

إذن المعادلة هي : $y = -x + 1$

ملاحظة 1 - 5 - 3

أ • معادلة الخط المستقيم الأفقي الذي يوازي محور x ويبعد عنه a حيث a عدد حقيقي هي $y = a$.

ب • معادلة الخط المستقيم الرأسي الذي يوازي محور y ويبعد عنه a حيث a عدد حقيقي هي $x = a$.

مثال

أ • أوجد معادلة الخط المستقيم الأفقي المار بالنقطة $(-3,6)$.

الحل : $y = 6$

ب • أوجد معادلة الخط المستقيم الرأسي المار بالنقطة $(-7,5)$.

الحل : $x = -7$

والسؤال الأخير بخصوص الخط المستقيم هو ما العلاقة بين خطين مستقيمين ؟

من الواضح عند رسم أي خطين مستقيمين فإنهما :

1 • إما أن يكونا متوازيين أي لا يلتقيان مهما امتدا من طرفيهما .

2 • أو أن يكونا متقاطعين في نقطة واحدة .

3 • أو أن ينطبقا على بعضهما بعضاً .

مبرهنة 1 - 5 - 4

إذا كان L_1 مستقيماً معادلته $y = m_1x + b_1$ وكان L_2 مستقيماً آخر معادلته $y = m_2x + b_2$ فإن :

1 • L_1 ، L_2 متوازيان إذا كان $m_1 = m_2$ أي إذا كان لهما نفس الميل .

2 • L_1 ، L_2 متطابقان إذا كان $m_1 = m_2$ وكان $b_1 = b_2$.

3 • L_1 ، L_2 متقاطعان في نقطة واحدة إذا كان $m_1 \neq m_2$.

4 • L_1 ، L_2 متعامدان إذا كان $m_1 \times m_1 = -1$

مثال

أ • إذا كـان $L_1 : y = 3x + 7$ ، $L_2 : 3x+9$ فـإن المسـتقيمين L_1 ، L_2 متوازيان لأن $m_1 = m_2 = 3$.

ب • إذا كان $L_1 : y = 3x + 7$ ، $L_2 : y = -1/3x + 9$ فإن $m_1 \times m_1 = -1$
أي أن L_1 ، L_2 متعامدين .

جـ • إذا كان $L_1 : 2x + 3y = 5$ ، $L_2 : 4x + 6y = 10$ فإن :

$$L_1 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad , \quad L_2 : y = -\frac{4}{6}x + \frac{10}{6}$$

إذن $m_1 = -\frac{2}{3} = -\frac{4}{6} = m_2$ وكذلك $b_1 = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} = b_2$

أي أن L_1 و L_2 متطابقين .

مثال

أوجد نقطة تقاطع المستقيمين

$$y = 3x + 4 \quad \dots (1)$$

$$y = 2x + 5 \quad \dots (2)$$

أي إيجاد نقطة تحقق المعادلتين معاً وهذا يتطلب حل المعادلتين آنيا باستخدام أحد أسـاليب حل المعادلات الخطية الآنية مثل الحذف أو التعـويض أو الرسـم والآن نسـتخدم أسـلوب الحذف.

واضح أنه بطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد أن :

$$0 = x + (-1) \Rightarrow x = +1$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن :

$$y = 3(1) + 4 = 7$$

إذن نقطة التقاطع هي $(1, 7)$.

تمارين

1 • أوجد ميل القطعة XY إذا كان

b • $X (3, 7)$, $Y (-2,-3)$ a • $X (0,0)$, $Y (-2,3)$

2 • أوجد طول القطعة XY في الحالات الواردة في السؤال الأول أعلاه .

3 • أوجد معادلة الخط المستقيم في كل من الحالات التالية :

أ • الميل 3 والمقطع من المحور الرأسي 4- .

ب • الميل 3 ويمر بالنقطة (2,5-) .

جـ • يمر بالنقطتين (7- ,3) و (5 ,2-) .

د • مقطعه من المحور الأفقي 4 ومن الرأسي 3- .

هـ • أفقي يبعد عن المحور الأفقي 5- وحدات .

و • رأسي يبعد عن المحور الرأسي 5- وحدات .

4 • إذا كان

$L_1: \; y = mx + 7$

$L_2: \; y = 4x + 15$

أ • وكان $L_1 \parallel L_2$ فأوجد قيمة m .

ب • وكان $L_1 \perp L_2$ فأوجد قيمة m .

5 • أوجد نقطة تقاطع المستقيمين

$2y - 4x + 7 = 0$

$5x + 7y - 3 = 0$

6-1 الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

تعلم من دراستك السابقة مفهوم الأسس وخواصها وسوف نراجعها معا في هذا البند .

إذا كان n عدداً طبيعيا وكان a عدداً حقيقيا فإن :

$a^n = a.a.a\ldots a,$ (مرة n)

فمثلا

$2^3 = 2\times 2 \times 2$

يسمى العدد a الأساس ويسمى العدد n الأس والمبرهنة التالية تعطي ابرز خواص الأسس وقوانينها .

مبرهنة 1 - 6 - 1

1 • $a^n \times a^m = a^{n+m}$ 2 • $a^0 = 1$ 3 • $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4 • $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 5 • $(a^n)^m = a^{nm}$ 6 • $(ab)^n = a^n . b^n$

7 • $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$ 8 • $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

9 • $a^n = a^m$, $a \neq 1$, $a \neq 0 \Rightarrow n = m$

10 • $a^n = b^n$, $n \neq 0 \Rightarrow a = b$

مثال

حل المعادلات التالية :

1 • $x^5 = 32$

الحل :

لاحظ أن $32 = 2^5$ ، إذن $x^5 = 2^5$ ومنها $x = 2$

2 • $2^x = 64$

الحل :

لاحظ أن $64 = 2^6$ إذن $2^x = 2^6$ ومنها $x = 6$.

3 • $5^x = 1$

الحل :

لاحظ أن $5^0 = 1$ إذن $5^x = 5^0$ ، ومنها $x = 0$.

والآن نقدّم الدالة الأسية على النحو التالي :

تعريف 1 - 6 - 2

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فإن الدالة $f : R \longrightarrow R$

بحيث إن $f(x) = a^x$ يسمى دالة أسيا لأساسه a .

وإذا أردنا رسم منحني $f(x)$ لقيمة معطاة فإننا نكوّن جدولا من النقاط التي تحققه ثم نصل بينهما .

مثال

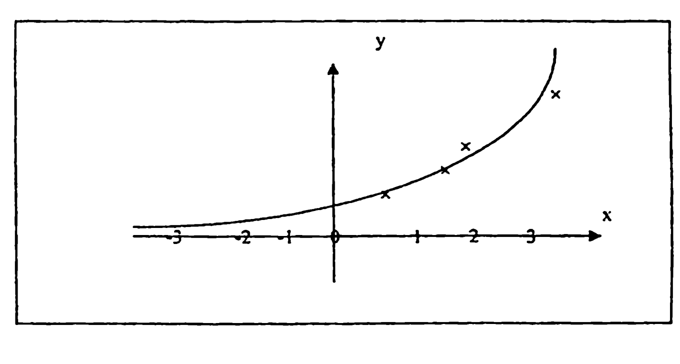
ارسم منحنى الدالة $f(x) = 2^x$ حيث $x \in R$

الحل :

نكون جدولا كما يلي :

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
f(x)	1	2	4	8	1/2	¼	1/8

نعين هذه النقاط في المستوي البياني كما في الشكل (9) ثم نصل بينها لنحصل على الرسم البياني المطلوب .



الشكل (9)

من الجدير بالملاحظة أن مجال الدالة هو R ومداه هو R^+

والسؤال الذي نسأله الآن هو ما معكوس الدالة الأسية $f(x) = a^x$ حيث $a > 0$ ، $a \neq 1$ ؟

لنحاول الإجابة على هذا السؤال بوضع $y = a^x$

ونحاول ان نعبر عن x بدلالة y ، فنجد أنفسنا غير قادرين على ذلك إلا إذا عرفنا دالة جديدة يسمى الدالة اللوغارتمية .

تعريف 1- 6 - 3

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ عدداً حقيقياً ثابتاً فـإن العبـارة $y = a^x$ تكافـئ العبارة $x = \log_a y$ أي أن x هي لوغارتم y للأساس a .

لاحظ أن مجال الدالة اللوغارتمية هو R^+ وان مداه هو R .

مثال

لاحظ ان $8 = 2^3$ وهذا يكـافئ $3 = \log_2 8$ ، أي أن لوغـارتيم 8 للأساس 2 يساوي 3 .

والمبرهنة التالية تعطي الخواص والقوانين الأساسية لللوغاريتمات :

مبرهنة 1- 6 - 4

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، $x , y > 0$ فإن

1 • $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

2 • $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3 • $\log_a x^n = n \log_a x$

4 • $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b \neq 1 , b > 0$

5 • $\log_a 1 = 0$

6 • $\log_a a = 1$

مثال

حل المعادلات التالية :

1 • $3 = \log_5 x$

الحل :

العبارة $3 = \log_5 x$ تكافئ $x = 5^3 = 125$

2 • $2 = \log_x 4$

الحل :

العبارة المعطاة تكافئ $4 = x^2 \Rightarrow x = 2$

لاحظ إننا أغفلنا -2 لأن أساس اللوغارتم يجب أن يكون موجباً .

• 3 $\log_{10}x + 2\log_{10}x = 3$

الحل :

لاحظ إن الطرف الأيسر يساوي

$$\log_{10}x + 2\log_{10}x = 3\log_{10}x = 3 \Rightarrow \log_{10}x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$$

مثال

اختصر $\log_{16} 8$

الحل:

لاحظ أن :

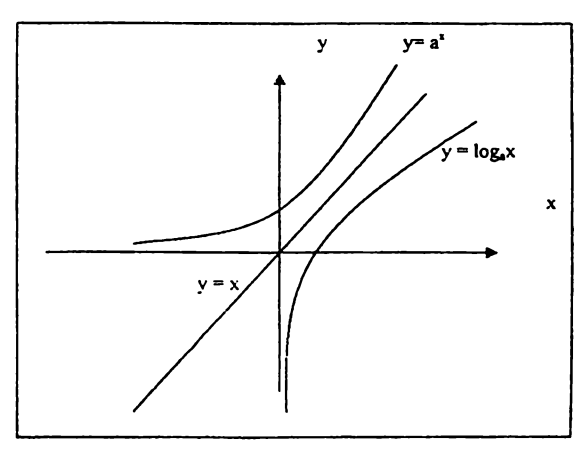
$$\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \frac{3\log_2 2}{4\log_2 2} = \frac{3}{4}$$

أما الدالة اللوغارتمية فيرمز له على النحو التالي :

$$f(x) = \log_a x \quad ; \quad a \neq 1 , a > 0$$

ومنحنى هذه الدالة ينشأ بعكس منحنى $f(x) = a^x$

والشكل (10) يوضح ذلك .



الشكل (10)

ملاحظة 1- 6 - 5

1 • إذا كان أساس اللوغارتم 10 فإنه يسمى اللوغارتم الاعتيادي .

2 • هنالك عدد حقيقي غير نسبي يرمز له بالرمز e وهو يساوي تقريبا 2.71 .

وإذا كانت e هي اساس اللوغارتم فإنه يسمى اللوغارتم الطبيعي لأن e تسمى العدد النابيري ونستخدم ln(x) للدلالة على $\log_e x$.

3 • ومن ابرز خواص اللوغارتمات الطبيعية هي لأي عدد حقيقي موجب c يكون $c = e^{\ln c}$

تمارين

1• اختصر ما يلي :

a • 100^0 b • 3^6 c • $(0.09)^{1/2}$ d • $\log_6 \frac{1}{36}$

e • $\log_4 16$

2 • إذا علمت أن :

$\log_2 7 = 2.81$, $\log_2 5 = 2.32$

فأوجد قيمة ما يلي :

a • $\log_2 35$ b • $\log_2 9.8$

3 • حل المعادلات التالية :

a • $\log_{10}(x2 - 3x + 6) = 1$ b • $(0.4)^x = 0.0256$

c • $\log_x 4 = 2$

4 • أوجد مجال الدوال التالية :

a • $f(x) = e^x$ b • $f(x) = \ln x$ c • $f(x) = \ln(3x+2)$

d • $f(x) = \ln_x 4$

الفصل الثاني

الغايات والاستمرارية

الفصل الثاني

الغايات والاستمرارية

Limits and Continuous

يعتبر مفهوم الغاية من أهم المفاهيم الرياضية المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل، نظراً لما لهذا الموضوع من دور بارز في دراسة المواضيع الأساسية للتحليل الرياضي آلا وهي استمرارية واشتقاق وتكامل الدوال .

ولذلك ننصح الطالب أن يهتم كثيراً بفهم موضوعات هذا الفصل لأنها تساعده على فهم الموضوعات اللاحقة .

2 - 1 غاية متغير

سنعرض في هذه الفقرة مفهوم غاية متغير مع بعض الأمثلة والملاحظات التي توضح هذا الموضوع .

تعريف 2 - 1 – 1

• نقول عن متغير x إنه يقترب إلى النقطة c من اليمين ، ونعبر عن ذلك بالكتابة :

$$x \xrightarrow[x>c]{} c \quad \text{أو} \quad x \longrightarrow c^{+}$$

إذا تحقق الشرط التالي :

مهما كان العدد الصغير الموجب δ ، يمكن إيجاد قيم للمتغير x في الفترة المفتوحة $(c\,,\ c+\delta)$.

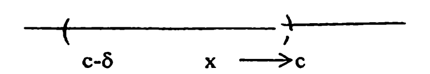
$$c \leftarrow x \qquad c+\delta$$

• نقول عن متغير x إنه يقترب إلى النقطة c من اليسار ، ونعبر عن ذلك بالكتابة :

$$x \xrightarrow[x<c]{} c \quad \text{أو} \quad x \longrightarrow c^{-}$$

إذا تحقق الشرط التالي :

مهما كان العدد الصغير الموجب δ ، يمكن إيجاد قيم للمتغير x في الفترة المفتوحة $(c-\delta\,,\ c)$.

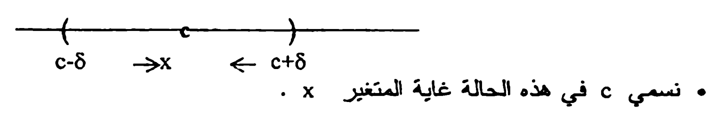


- نقول عن متغير x أنه يقترب إلى النقطة c (من الجانبين) ونعبر عن ذلك بالكتابة:

$$x \longrightarrow c$$

إذا تحقق الشرط التالي :

مهما كان العدد الصغير الموجب δ ، يوجد قيم للمتغير x في الفترة المفتوحة $(c-\delta , c+\delta)$ أي يوجد قيم لـ x تحقق المتباينة $|x - c| < \delta$.



- نسمي c في هذه الحالة غاية المتغير x .

مثال

إذا كان x المتغير الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ حيث $x_n = 1 + \frac{1}{10^n}$

فإن $x \longrightarrow 1^+$ لأنه مهما كان العدد الصغير الموجب δ يوجد للمتغير x قيم في الفترة $(1, 1+\delta)$ ولتحديد قيم x هذه نحل المتباينات $1 < x_n < 1+\delta$ أي نوجد n التي تحقق $1 < 1 + \frac{1}{10^n} < 1 + \delta$

وحل هذه المتباينات هو $\frac{1}{10^n} < \delta$ أي $10^n > \frac{1}{\delta}$ ومنه $n > \log \frac{1}{\delta}$

مثال

إذا كان x المتغير الذي يأخذ القيم : $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ حيث $x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$

فإن $x \longrightarrow 1^-$ لأنه مهما كان العدد الصغير الموجب δ ، يوجد قيم لـ x في الفترة $(1-\delta , 1)$ وتحدد قيم x هذه كما في المثال السابق .

مثال

إذا كان x المتغير الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ حيث :

$$x_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{10^n} & \forall \text{ فردي } n \\ 1-\frac{1}{10^n} & \forall \text{ زوجي } n \end{cases}$$

فإن $x \longrightarrow 1$ لأنه مهما كان العدد الصغير الموجب δ يوجد قيم لـ x في الفترة $(1-\delta, 1+\delta)$ وتحدد قيم x هذه كما في الأمثلة السابقة .

2 - 1 - 2 ملاحظات

أ • قد يقترب المتغير x إلى النقطة c دون ان يأخذ هذه القيمة فمثلا : إذا كان x يأخذ القيم : $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ حيث $x_n = \frac{1}{10^n}$ فإن $x \longrightarrow 0$ ولكن $x \neq 0$ لأن $x_n \neq 0$ مهما كان n من $\mathbf{N}$.

ب • ليس من الضروري أن يكون للمتغير x غاية محدودة ، إذ قد نجد متغيراً x يأخذ قيماً تكبر بدون تناه بحيث تصبح أكبر من أي عدد موجب M . في مثل هذه الحالة نقول إن المتغير x يقترب إلى $+\infty$ ونكتب $x \longrightarrow +\infty$

فمثلا : إذا كان x يأخذ القيم $2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...$ فإن $x \longrightarrow +\infty$

وقد نجد متغيراً x يأخذ قيماً تصغر بدون تناه بحيث تحقق المتباينة $x < -M$ مهما كان العدد الموجب M ، في مثل هذه الحالة نقول إن x يقترب إلى $-\infty$ ونكتب $x \longrightarrow -\infty$

فمثلا إذا كان x يأخذ القيم $-3, -9, -29, ..., -3^n, ...$ فإن $x \longrightarrow -\infty$.

جـ • إذا كان $x \longrightarrow c$ حيث $c \neq 0$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون x قيم في الفترة $(c-\delta, c+\delta)$ لها نفس إشارة c.

البرهان:-

إذا فرضنا أن إشارة c موجبة أي أن $0 < c$ ، فإنه يوجد δ بحيث أن $0 < \delta < c$ ومنه فإن $0 < c-\delta$ وبما أن $x \longrightarrow c$ ، فإنه يوجد قيم لـ x تحقق المتباينة $|x - c| < \delta$ ، أي يوجد قيم لـ x تحقق $-\delta < x - c < \delta$ ، أي يوجد قيم لـ x تحقق $c-\delta < x < c+\delta$ وبما أن $0 < c-\delta$ فإن قيم x هذه لها إشارة موجبة مثل إشارة c وبالمثل نبرهن الحالة التي تكون فيها إشارة c سالبة.

2-2 غاية الدالة Limit of Function

إذا كانت $y = f(x)$ دالة ما بالمتغير x ، فإننا نعلم ان قيم y تتغير مع تغير قيم x فإذا اقترب المتغير x إلى غاية ما c فإنه من الطبيعي ان نتساءل عن غاية الدالة y وكيف نوجدها ، ولتوضيح غاية دالة بشكل حسي نلاحظ ما يلي :

إذا شكلنا متتالية من قيم x (أي من مجال الدالة f) بحيث تؤول إلى c مثل :

$$x_1 , x_2 , x_3 \ldots, x_n , \ldots$$

فإن

$$f(x_1) , f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$$

تمثل متتالية من قيم الدالة وتعبر عن سلوك قيم الدالة f وتوحي إلى غاية هذه الدالة .

مثال

إذا أردنا إيجاد غاية الدالة $y = x + 3$ عندما ينتهي المتغير x إلى 1 فإننا نأخذ متتالية $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots, x_n ,\ldots$ من قيم x تقترب من 1 ونوجد متتالية قيم الدالة y المرافقة كما في الجداول التالية :

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	...	1
y	4.1	4.01	4.001	4.0001	...	4

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1
y	3.9	3.99	3.999	3.9999	...	4

نلاحظ من هذه الجداول أنه سواء آلت x إلى 1 من اليمين أو من اليسار فإن y تقترب من 4 مما يشير إلى أن غاية الدالة هي 4 عندما ينتهي المتغير x إلى 1. نعبر عن ذلك بالكتابة $\lim\limits_{x \to 1} y = 4$.

- يمكن التحدث عن غاية دالة $f(x)$ عندما يقترب المتغير x إلى نقطة c دون ان تكون c من مجال f .

مثال

ليكن $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ولنوجد غاية $f(x)$ عندما يقترب المتغير x إلى 1 .

نلاحظ أن هذه الدالة غير معرفة في النقطة 1 ، ولكن من الجدولين التاليين لبعض قيم x وقيم $f(x)$ نلاحظ أن :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

x	1.1	1.01	1.001	...	1
f(x)	2.1	2.01	2.001	...	2

جدول يبين غاية $f(x)$ عندما يقترب x إلى 1 من اليمين

x	0.9	0.99	0.999	...	1
f(x)	19	1.99	1.999	...	2

جدول يبين غاية $f(x)$ عندما يقترب x إلى 1 من اليسار

مثال

ليكن $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ولنوجد غاية $f(x)$ عندما يقترب x إلى 1 من اليمين ومن اليسار.

نشكل متتالية من قيم x التي هي أكبر من 1 وتتناقص مقتربة إلى 1 من اليمين ثم نوجد قيم $f(x)$ الموافقة فنحصل على جدول كالتالي :

X	1.1	1.01	1.001	...	$\to 1$
f(x)	10	100	1000	....	$\to +\infty$

نلاحظ من هذا الجدول أن $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

ولمعرفة غاية $f(x)$ عندما يقترب x إلى 1 من اليسار نختار متتالية من قيم x التي هي أصغر من 1 وتزداد مقتربة إلى 1 من اليسار ثم نوجد قيم $f(x)$ الموافقة فنحصل على جدول كالتالي :

X	0.9	0.99	0.999	...	$\to 1$
f(x)	-10	-100	-1000	....	$\to -\infty$

نلاحظ من هذا الجدول إن $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

• إن الطريقة التي سلكناها لإيجاد غاية دالة في الأمثلة السابقة هي طريقة حسية توحي إلى غاية الدالة ولكنها ليست الطريقة العلمية الرياضية الدقيقة التي يستخدمها الرياضيون في دراسة الغايات ، لان الرياضيين المختصين يعبرون عن مفاهيم الغايات بقوانين واصطلاحات رياضية سنوردها فيما يلي .

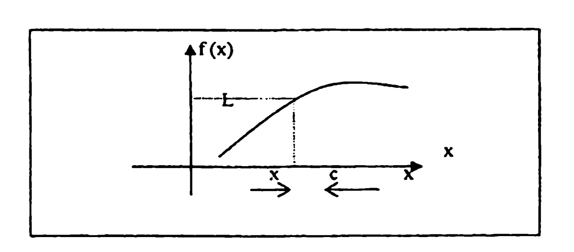
تعريف غاية دالة بالقوانين الرياضية 2 - 2 - 1

لتكن f دالة معرفة في كل نقطة من نقط فترة مفتوحة I تحوي c (يمكن أن تكون f غير معرفة في c نفسها).

نقول عن عدد L إنه غاية الدالة f(x) عندما x يقترب إلى c (أو أن L هو غاية الدالة f في النقطة c) ونكتب $\lim_{x \to c} f(x) = L$ إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ ; \ 0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

• إذا وجد عدد مثل L هذا فإننا نقول : ان للدالة f غاية في النقطة c ، أو إن غاية f في النقطة c موجودة .



الشكل (1)

مثال

استخدم التعريف السابق لتثبت أن غاية الدالة f(x) = 3x -1 هي 2 عندما x يقترب إلى 1 .

الحل:

ليكن ε > 0 ولنوجد δ > 0 بحيث يكون :

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

إن $|f(x)-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-1-2| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$

فإذا أخذنا $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ نجد أن :

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

وهكذا وجدنا $0 < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ التي تحقق شرط التعريف وبالتالي : $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

ملاحظات 2- 2 - 2

أ • إن الطريقة المستخدمة في حل المثال السابق وإيجاد δ المقابلة لـ ε تكون ممكنة وسهلة عندما تكون الدالة $f(x)$ خطية بسيطة ولكنها طريقة صعبة إذا كانت الدالة $f(x)$ غير خطي ولذلك سنقدم بعد قليل العديد من المبرهنات التي تساعد في حساب الغايات دون اللجوء إلى δ و ε وطريقة التعريف السابق .

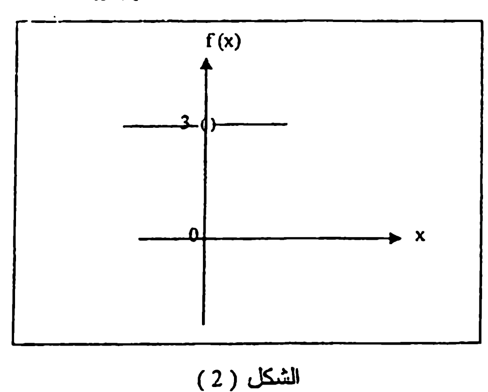
ب • من دراسة خواص القيمة المطلقة نعلم ان العبارة $|x-c| < \delta$ تكافئ العبارة $c-\delta < x < c+\delta$ وأن العبارة $|f(x)-L| < \varepsilon$ تكافئ العبارة $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ ولذلك فإن التعريف السابق يكتب على الشكل التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 ; \ x \in (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c} f(x) = L$$

جـ • قد تكون الدالة f غير معرفة في النقطة c ومع ذلك يوجد لها غاية في هذه النقطة .

مثال

إذا كان $f(x) = 3$ لكل $x \neq 0$ فإن $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ مع أن $f(0)$ غير موجودة



الشكل (2)

د • قد تكون الدالة f معرفة في النقطة c ولها غاية في هذه النقطة ولكن

$$\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$$

مثال

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3 & ; x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ فإننا نبرهن كما في المثال السابق تماماً على

أن $\lim_{x\to 0} f(x)=3$ في حين أن $f(0)=0$ أي أن $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

هـ • قد نجد دوال معرفة في النقطة c وفي جوار c ولكن ليس لها غاية في c .

مثال

ليكن $f(x)=\begin{cases}0 & ; x<0\\ 1 & ; x\geq 0\end{cases}$

نلاحظ أن هذه لدالة معرفة في النقطة 0 ولكن ليس لها غاية عندما x يقترب إلى 0 .

• سنقدم فيما يلي بعض الأمثلة الهامة عن الغايات لبعض الدوال التي يكون استخدام التعريف 2- 2 - 1 سهلا في إثبات صحتها ، وذلك لكي نستفيد منها ومن بعض المبرهنات اللاحقة في حساب الغايات لدوال يصعب استخدام التعريف 2- 2- 1 في حلها .

مثال

إذا كان a عدداً ثابتاً وكانت $f(x)=a$ لكل x فإن $\lim_{x\to c} f(x)=a$

• ينتج عن هذا المثال انه إذا كان a عدداً ثابتاً ما، فإن $\lim_{x\to c} a=a$

وهكذا فإن : $\lim_{x\to 0} 5=5$ و $\lim_{x\to 2} 10=10$ الخ

مثال

إذا كانت $f(x)=x$ فإن $\lim_{x\to c} f(x)=c$.

• ينتج من هذا المثال أن $\lim_{x\to c} x=c$

وهكذا نجد أن : $\lim_{x\to 1} x=1$ و $\lim_{x\to 5} x=5$ ... الخ .

و • يمكن الاستفادة من بعض العمليات الجبرية البسيطة في حساب بعض الغايات التي تظهر غير واضحة عند التعويض المباشر كما تبين الأمثلة التالية :

مثال

اذا كانت $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ فأوجد غاية $\lim_{x\to3} f(x)$

الحل :

نلاحظ انه عند التعويض المباشر نصل الى صيغة من الشكل $\frac{0}{0}$ وهي صيغة غير محددة سوف ندرسها لاحقا . ولكن نعلم أن $x^2-9=(x-3)(x+3)$ ولذلك فإن :

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to3}(x+3)=6$$

مثال

إذا كانت $f(x)=\frac{-3x^2+12x-9}{x-1}$ فأوجد $\lim_{x\to1} f(x)$

الحل:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-3x+9)}{x-1}=\lim_{x\to1}(3x+9)=6$$

مثال

أوجد $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

الحل :

بالتعويض المباشر نصل إلى صيغة $\frac{0}{0}$ ولكن إذا ضربنا بسط ومقام الكسر $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ بمرافق المقام الذي هو $\sqrt{x}+\sqrt{2}$ نجد أن :

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}=\lim_{x\to2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

2 – 3 مبرهنات أساسية في حساب الغايات

سنقدم فيما يلي – بدون برهان – بعض المبرهنات التي تسهل علينا حساب نهايات الدوال بدون استخدام التعريف 2-2-1 .

مبرهنة 2-3-1

إذا كانت للدالة f غاية في النقطة c فإن هذه الغاية وحيدة.

• ينتج عن هذه المبرهنة أنه إذا عرفنا ان $\lim_{x \to c} f(x) = L$ فإننا نستطيع الحكم على ان كل عدد حقيقي يختلف عن L لن يكون غاية لـ f(x) عندما x يقترب إلى c ، وهذا يساعدنا على حل تمارين من نمط المثال التالي :

مثال

برهن على أن العدد 4 ليس غاية للدالة $f(x) = 2x$ عندما يقترب x إلى 1 .

الحل:

يمكن أن نبرهن بسهولة معتمدين على التعريف 2-2-1 ان $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ ولذلك فإن $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 4$ بسبب وحدانية غاية الدالة .

مبرهنة 2-3-2

إذا كانت f دالة ما ، وكان L عدداً ما ، فإن الشروط التالية متكافئة :

1. $\lim_{x \to c} f(x) = L$
2. $\lim_{x \to c} (f(x) - L) = 0$
3. $\lim_{x \to c} |f(x) - L| = 0$

ملاحظات 2-3-3

أ . إذا أخذنا – في المبرهنة السابقة – $L = 0$ نحصل على التكافؤ الهام التالي :

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to c} |f(x)| = 0$$

فمثلا لو أخذنا $f(x) = x$ فإننا نعلم أن $\lim_{x\to 0} x = 0$ ولذلك فإن $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

ب . يمكن أن نبرهن بسهولة على أنه إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ فإن $\lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$

فمثلا نعلم ان $\lim_{x\to c} x = c$ ولذلك فإن $\lim_{x\to c} |x| = |c|$

مبرهنة 2 - 3 - 4

إذا كانت h, f, g ثلاث دوال تحقق :

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ لكل x تنتمي إلى فترة مفتوحة تحوي c .

وإذا كان $\lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$ فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$

مثال

نعلم أن $0 \le \frac{|x|}{1+x^2} \le |x|$ وأن $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = \lim_{x\to 0} 0$ ولذلك فإنه

ينتج عن المبرهنة السابقة أن $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{1+x^2} = 0$.

مبرهنة 2- 3 - 5

إذا كانت f و g دالتين بحيث ان $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$ فإن :

1. $\lim_{x\to c} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda L_1 + \mu L_2$ مهما كان العددان λ و μ .
2. $\lim_{x\to c} f(x).g(x) = L_1.L_2$
3. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ بشرط أن تكون $L_2 \ne 0$ و $g(x) \ne 0$

ملاحظات 2- 3 - 6

أ . باختيار مناسب للعددين λ و μ نحصل من (1) في المبرهنة السابقة على بعض الحالات الخاصة والهامة في حساب الغايات كالحالات التالية :

- إذا أخذنا $\lambda = \mu = 1$ نحصل على :

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2 = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

أي أن غاية مجموع دالتين تساوي إلى مجموع نهايتي هذين الدالتين .

- إذا أخذنا $\lambda = 1$ و $\mu = -1$ نحصل على :

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2 = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

(أي أن غاية الفرق = فرق الغايات)

- إذا أخذنا $\lambda = a$ حيث a ثابت ما و $\mu = 0$ نحصل على :

$$\lim_{x \to c} a.f(x) = a.L_1 = a \lim_{x \to c} f(x)$$

ب . بالاعتماد على الاستقراء الرياضي يمكن تعميم البندين (1) و (2) من المبرهنة السابقة على أي عدد منته من الدوال .

جـ . ينتج عن المبرهنة السابقة الحالات الخاصة التالية :

- إذا كانت $L_1 \neq \infty$ وكانت $L_2 = +\infty$ (أو $L = -\infty$) فإن :

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = +\infty \quad (\text{أو} \quad \lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = -\infty)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \text{ أو } -\infty \quad , \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- إذا كانت $L_1 = L_2 = +\infty$ فإن :

$\lim_{x \to c} f(x).g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = +\infty$ أما غاية النسبة $\frac{f(x)}{g(x)}$

فإننا لا نستطيع معرفتها مباشرة ، إنما نقول : انه لدينا حالة غير محددة من الشكل $\frac{+\infty}{+\infty}$

ولدينا حالات غير محددة عديدة منها :

$$1^{\infty} , \quad 0^{\infty} , \quad \infty - \infty , \quad 0.\infty , \quad 0^0 , \quad \frac{\infty}{\infty} , \quad \frac{0}{0}$$

وان عملية إيجاد الغاية لهذه الحالات غير المحددة تدعى إزالة الحالة غير المحددة ، وسنورد هذه العملية عند دراسة تطبيقات المشتقة (مبرهنة لوبيتال) في الفصل القادم .

مثال

إذا كان $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n$ دالة على شكل كثيرة حدود فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \lambda_0 + \lambda_1 c + \lambda_2 c^2 + \ldots + \lambda_n c^n$$

البرهان :

نعلم أن $\lim_{x\to c} x = c$ ولذلك فإن $\lim_{x\to c} x^2 = \lim_{x\to c} x.x = c.c = c^2$ وهكذا فـإن

$\lim_{x\to c} x^r = c^r$ حيث $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

ومنه نجد أن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \lim_{x\to c} x + \lambda_2 \lim_{x\to c} x^2 + \ldots + \lambda_n \lim_{x\to c} x^n$$

$$= \lambda_0 + \lambda_1 c + \lambda_2 c^2 + \ldots + \lambda_n c^n = f(c)$$

مثال

إذا كانت $f(x) = 2 - x + x^2 + 3x^3$

فإن $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2 - 1 + (1)^2 + 3(1)^3 = 5$

• قد نجد دوال ذات شكل معقد نسبيا مثل $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$ أو $f(x) = \sin(x^3 - 2)$ أو غير ذلك مما يصعب معرفة الغاية بالطريقة المباشرة لذلك نحتاج إلى النظرية التالية التي تساعدنا في حساب نهايات مثل هذه الدوال .

مبرهنة 2 - 3 - 7

إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ وكان $f(x) \neq L_1$ لجميع قيم x الواقعة في فتـرة مفتوحـة تحوي c وإذا كانت $\lim_{y\to L_1} g(y) = L_2$ فإن :

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = L_2 = \lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to L_1} g(y)$$

ملاحظة 2 - 3 - 8

عند استخدام المبرهنات السابقة في حل التمارين يمكن الاستفادة من نتائج للتمارين التالية التي كنا قد برهنا على بعضها .

• إذا كان a ثابتا ما ، فإن $\lim_{x\to c} a = a$

• إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

• إذا كان $0 < c$ فإن $\lim_{x\to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

• $\lim_{x\to 0} e^x = 1$

• إذا كان $0 < c$ و $1 \neq c$ فإن $\lim_{x\to c} \ln x = \ln c$

• $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

• $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (بشرط $0 < c$ عندما يكون n عدداً زوجيا) .

مثال

لتكن $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ فأوجد $\lim_{x\to 0} h(x)$

الحل:

نلاحظ انه إذا وضعنا $f(x) = 1 - x^2$, $g(y) = \sqrt{y}$ نجد أن :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{1-x^2} = h(x)$$

ولذلك فإن $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} (g \circ f)(x)$

ولدينا $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1-x^2) = 1$

كما أن $\lim_{y\to 1} g(y) = \lim_{y\to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1$

ولذلك فإنه ينتج عن المبرهنة السابقة أن : $\lim_{x\to 0} (g \circ f)(x) = 1$

أي أن $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$.

مثال

إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ حيث $0 < L$ فبرهن على أن $\lim_{x\to c} \ln f(x) = \ln L$

الحل :

نضع $g(y) = \ln y$ فنجد إن $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln f(x)$

$$\lim_{x\to c} \ln f(x) = \lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to L} g(y) = \lim_{y\to L} \ln y = \ln L$$

• مثال :

برهن على أن $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

الحل :

نلاحظ أن : $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

فإذا وضعنا $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ نجد من الملاحظة (2- 3- 8) أن $\lim_{x\to 0} f(x) = e > 0$

ولذلك فإنه ينتج – عما تقدم في المثال أعلاه – أن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln f(x) = \ln(\lim_{x\to 0} f(x)) = \ln e = 1$$

• ينتج عن تعريف الدالة الأسية وعلاقته بالدالة اللوغاريتمية وعن المثال السابق انه إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ فإن $\lim_{x\to c} f(x) = e^{L}$.

مبرهنة 2- 3 - 9

إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ وكانت $g(x)$ دالة محدوداً فإن :

$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$.

وكتطبيق على هذه المبرهنة نلاحظ أن $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ وذلك لان $\lim_{x\to 0} x = 0$. كما أن $\sin\frac{1}{x}$ دالة محدود .

2 - 4 الغايات من جانب واحد

إن دراسة غاية الدالة $f(x)$ عندما x يقترب إلى c هي دراسة قيم $f(x)$ المقابلة لقيم x وذلك عندما يتحرك المتغير x مقترباً من c. وعند دراسة غاية متغير في (2-1) وجدنا أن x قد يقترب إلى c بقيم أكبر من c ، أي أن x يقترب إلى c من اليمين وعبرنا عن ذلك بالكتابة $x \longrightarrow c^+$ ، وقد يقترب x إلى c بقيم أصغر من c، أي أن x يقترب إلى c من اليسار وعبرنا عن ذلك بالكتابة $x \longrightarrow c^-$. وقد يقترب x إلى c من الجانبين وعبرنا عن ذلك بالكتابة $x \longrightarrow c$. وان دراسة غاية $f(x)$ عندما x يقترب إلى c تتضمن :

- دراسة غاية $f(x)$ عندما x يقترب إلى c من اليمين التي نرمز لها بـ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ ونسميها غاية الدالة f في النقطة c من اليمين .
- دراسة غاية $f(x)$ عندما x يقترب إلى c من اليسار التي نرمز لها بـ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ ونسميها غاية الدالة f في النقطة c من اليسار .

• نسمي كل من $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ غاية للدالة $f(x)$ في النقطة c من جانب واحد وتعرف هذه الغايات بالقوانين الرياضية كما يلي :

تعريف 2 - 4 - 1

• نقول إن الدالة $f(x)$ يتناهى للنقطة L عندما يقترب المتغير x إلى النقطة c من اليمين ، إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ ;\ \ c < x < c + \delta\ \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

وفي هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ ونسمي L غاية الدالة $f(x)$ في النقطة c من اليمين .

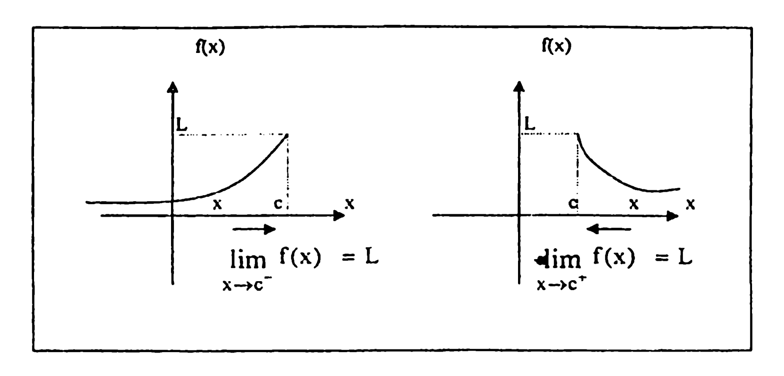
• نقول إن الدالة $f(x)$ يتناهى للنقطة L عندما يقترب المتغير x إلى النقطة c من اليسار ، إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ \ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0\ \ ;\ \ c - \delta < x < c\ \ \Rightarrow\ \ |f(x) - c| < \varepsilon$$

وفي هذه الحالة نكتب $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ ونسمي L غاية الدالة $f(x)$ في النقطة c من اليسار .

ملاحظات 2 - 4 - 2

أ • نوضح معاني التعريف السابق بالشكلين التاليين .



الشكل (3)

ب • قد نجد دوال معرفة على يمين c فقط (غير معرفة على يسار c) وفي هذه الحالة نستطيع دراسة وجود غاية من اليمين فقط .

وقد نجد دوال معرفة على يسار c فقط (غير معرفة على يمين c) وفي هذه الحالة نستطيع دراسة وجود غاية من اليسار فقط .

فالدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ معرفة على يمين النقطة 0 وغير معرفة على يسار هذه النقطة، ولذلك يمكن ان نبحث في مسألة وجود الغاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ولكننا لا نبحث عن الغاية $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

أما الدالة $f(x) = \sqrt{1-x}$ فإنها معرفة على يسار النقطة 1 وغير معرفة على يمينها ، ولذلك يمكن ان نبحث عن $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ولكننا لا نبحث عن $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

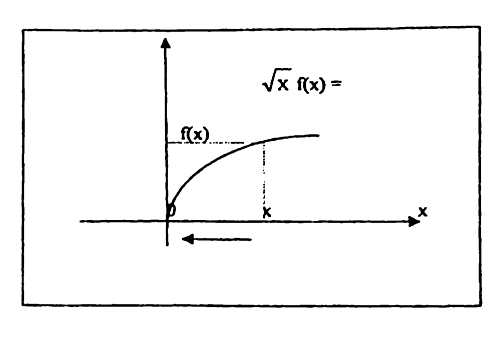
مثال

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ فإن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

البرهان :

لتكن $\varepsilon > 0$ ولنوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$0 < x < 0 + \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$



الشكل (4)

إن $|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$

فإذا أخذنا $\delta = \varepsilon^2$ نجد أن : $0 < x < 0 + \delta \Rightarrow x < \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

ومنه $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

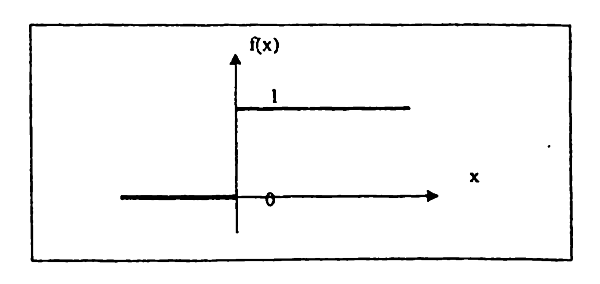
- لاحظ إن $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ غير موجودة لأن $\sqrt{x}$ غير معرف عندما تكون x سالبة .

ملاحظة 2- 4 - 3

قد نجد دوال تملك غاية من اليمين وغاية من اليسار في نقطة c ولكنها لا تملك غاية من الجانبين في c .

مثال

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ فإن $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ ولكن $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة .



الشكل (5)

البرهان :

- إن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ لأن :

لتكن $\varepsilon > 0$ ولنوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$0 < x < 0 + \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

إن :

$$0 < x \ \& \ |f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x \ \& \ |1 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x \ \& \ 0 < \varepsilon$$

ولذلك يمكن ان نأخذ δ أي عدد موجب لنجده يحقق المطلوب .

- إن $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ لأن :

لتكن $\varepsilon > 0$ ولنوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$0 - \delta < x < 0 \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

إن :

$$x < 0 \ \& \ |f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x < 0 \ \& \ 0 < \varepsilon$$

ولذلك نستطيع اختيار δ أي عدد موجب لنجده يحقق المطلوب .

مبرهنة 2- 4 - 4

إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون للدالة f غاية تساوي L في النقطة c هو أن تكون للدالة f غاية من اليمين وغاية من اليسار في c وأن تكون هاتان النهايتـــان متساويتين وتساويان إلى L .

وبلغة الرياضيات :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L$$

ملاحظات 2 - 4 - 5

أ • ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كانت إحدى النهايتين الجانبيتين لدالـــة f غيـــر موجودة في النقطة c فإن هذه الدالة لا يملك غاية في c .

ب • ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كانت النهايتان الجانبيتان لدالة f موجودتين في النقطة c ولكنهما غير متساويتين فإنه ليس لهذه الدالة غاية في c .

جـــ • يجب أن نشير هنا إلى ان جميع المبرهنات التي ذكرناها في الفقرة 2 - 3 والتـــي تعالج موضوع نهايات الدوال في نقطة c ، تبقى صحيحة في حالة الغايات الجانبية.

مثال

ليس للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غاية في النقطة 0 لأنه لا يملك غاية من اليســ
في هذه النقطة .

مثال

إذا كانت $f(x)=\begin{cases} 2 & ; \quad x>0 \\ -2 & ; \quad x\leq 0 \end{cases}$ ، فإننا نستطيع ان نبــر

بسهولة على أن : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$ و أن $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-2$

وبما أن هاتين النهايتين غير متساويتين فإن $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة .

2 - 5 الغايات اللانهائية للدوال

درسنا في الفقرات السابقة من هذا الفصل نهايات الدوال عندما يقترب المتغير x
إلى نقطة محدودة c ولكن ماذا عن نهايات الدوال عنــدما يقتــرب x إلــى $\pm\infty$
بالحقيقة لدينا للتعريف التالي :

تعريف 2 - 5 - 1

I • نقول إن الدالة $f(x)$ تنتهي إلى النقطة L عندما يقتــرب المتغيــر x إلــى ∞
ونكتب : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=L$

إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ M>0\ \ ;x>M\ \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

ونقول إن الدالة $f(x)$ تنتهي إلى النقطة L عنــدما يقتــرب المتغيــر x إلــى ∞-
ونكتب : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$

إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ M>0\ \ ;x<-M\ \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

II • نقول إن الدالة $f(x)$ تنتهي إلى $+\infty$ عندما يقترب المتغير x إلــى النقطــة
ونكتب : $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$

إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ M>0\ \ \exists\ \delta>0\ \ ;\ \ |x-c|<\delta\ \Rightarrow\ f(x)>M$$

ونقول إن الدالة $f(x)$ تنتهي إلى $-\infty$ عندما يقترب المتغير x إلى النقطة c ونكتب

$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$:

إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall M>0 \quad \exists \delta>0 \quad ; \quad |x-c|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$$

III. نقول ان الدالة $f(x)$ تنتهي إلى $+\infty$ عندما يقترب المتغير x إلى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall M>0 \quad \exists K>0 \quad ; x>K \Rightarrow f(x)>M$$

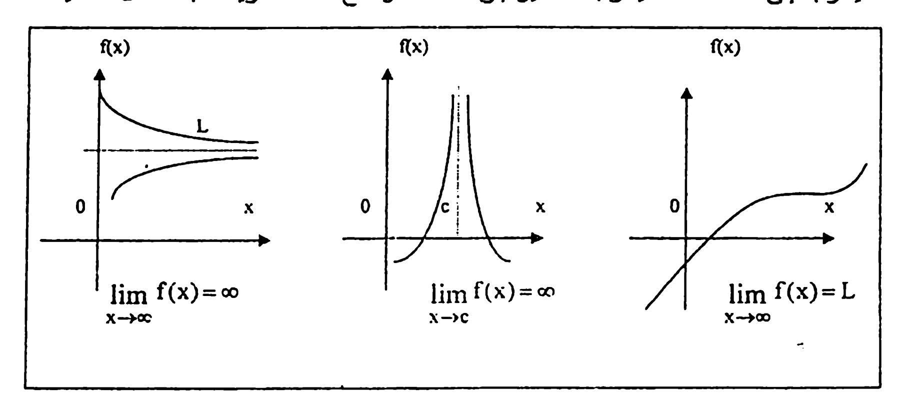
ونقول إن الدالة $f(x)$ تنتهي إلى $-\infty$ عندما يقترب المتغير x إلى $-\infty$ ونكتب

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$:

إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall M>0 \quad \exists K>0 \quad ; x<-K \Rightarrow f(x)<-M$$

ولدينا صيغ مشابهة للدالة الذي يقترب إلى $\infty +$ عندما يقترب المتغير إلى $\infty -$ وللدالة الذي يقترب إلى $\infty -$ عندما يقترب المتغير إلى $\infty +$. نوضح هذا التعريف بالأشكال التالية :



الشكل (6)

مثال

إذا كانت $f(x) = \frac{x+1}{x}$ فإن $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

البرهان :

لتكن $\varepsilon > 0$ ولنوجد $M > 0$ بحيث يكون

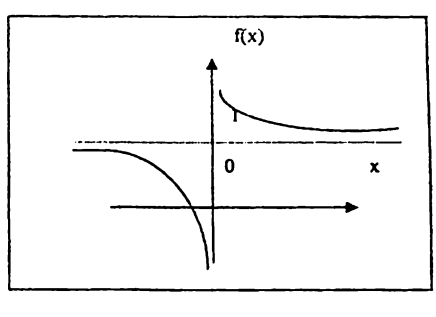
$$|x| > M \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

إن : $|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|1 + \frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

لذلك نختار $M = \frac{1}{\varepsilon}$ لنجد أن M تحقق المطلوب حيث أن $M > 0$

و $|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftarrow |x| > M$.



الشكل (7)

مثال

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ فإن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$

البرهان :

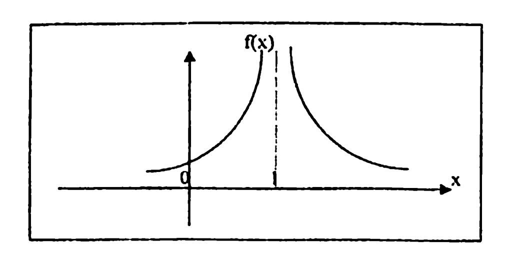
لتكن $M > 0$ ولنوجد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$\cdot 1| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

إن :

$$x)| > M \Leftrightarrow \left|\frac{1}{(2-x)^2}\right| > M \Leftrightarrow (2-x)^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

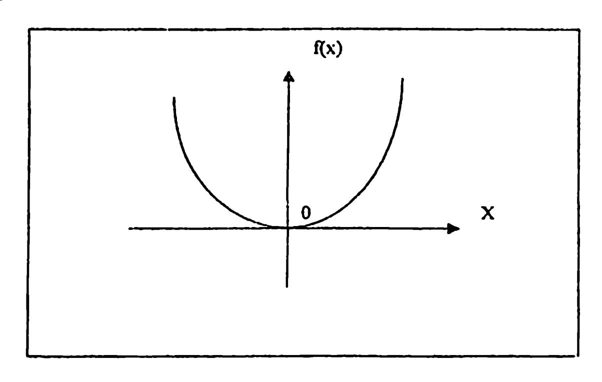
لذلك نأخذ $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ فنجدها تحقق المطلوب .



الشكل (8)

مثال

إذا كانت $f(x) = x^2$ فإن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$



الشكل (9)

البرهان :

لتكن $0 < M$ ولنوجد $0 < k$ بحيث يكون :

$$|x| > k \Rightarrow |f(x)| > M$$

إن :

$$|f(x)| > M \Leftrightarrow |x^2| > M \Leftrightarrow x^2 > M \Leftrightarrow |x| > \sqrt{M}$$

فإذا أخذنا $k = \sqrt{M}$ نجدها تحقق المطلوب .

ملاحظات 2 – 5 – 2

أ • يمكن تطبيق مبرهنات الغايات الواردة في (2 – 3) في حـــالة دراسة الغايـــات عنـــد يقترب المتغير x إلى $+\infty$ أو $-\infty$.

ب • بدون برهان أنه إذا كانت :

$$(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

دالة كثيرة حدود فإن غاية هذه الدالة عندما يقترب المتغير x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هـ غاية حده ذي الدرجة الكبرى أي :

$$m_{+\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

كما أن :

$$n_{-\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

فمثلا : إذا كانت $p(x) = -2x^3 + 2x^2 - x$

فإن:

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$$

جـ • إذا كانت
$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

دالة كسرية (بسطه كثيرة حدود ومقامه كذلك) فإننا نقبل بدون برهان أيضا أن :

1• $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$ إذا كان $n = m$.

2• $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ إذا كان $m > n$.

3• $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ أو $-\infty$ إذا كان $m < n$.

ونحسب هذه الغاية الأخيرة من حساب $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ وبعد إجراء الاختصار المناسب

مثال

1. إذا كانت $f(x) = \dfrac{5x^2 - 8x^7 + 6x - 1}{2x^7 + 3x^2 - 8x}$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{-8}{2} = -4$

2. إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{3x^4 - 2x^2 + 5}$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3. إذا كانت $f(x) = \dfrac{3x^4 - 2x^3 + x - 3}{x^2 - 2x^3 + x}$

فإن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4}{-2x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{3}{2}x = +\infty$

4. إذا كانت $f(x) = \dfrac{x - 5x^2 + x^3 - x^6}{x^3 - x^2 + 1}$

فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^6}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

2 - 6 مسائل محلولة عن الغايات

سنقدم في هذه الفقرة بعض المسائل الهامة عن الغايات ويمكن الاستفادة من هـذه المسائل في حل تمارين أخرى مشابهة بصيغتها لهذه المسائل ، كما نوضح ذلك في التطبيقات التي ندرجها بعد كل مسألة .

مسألة 2- 6 -1

إذا كانت $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ دالـة كسـرية (أي أن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرتي حدود) وكان $Q(c) \neq 0$ فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$

البرهان :

من المبرهنة (2- 3 – 5) لدينا :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to c} P(x)}{\lim\limits_{x \to c} Q(x)}$$

وبالاعتماد على غاية الدالة كثير الحدود نجد ان :

$$\lim_{x\to c} Q(x) = Q(c) \quad و \quad \lim_{x\to c} P(x) = P(c)$$

ومنه $\lim_{x\to c} f(x) = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$

مثال :

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 1}{x^2 - 2x + 3}$

فإن : $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{2(1)^3 + 4(1)^2 - 1}{(1)^2 - 2(1) + 3} = \dfrac{5}{2}$

مسألة 2- 6 - 2

إذا كانت $h(x) = x^{\frac{p}{q}}$ حيث p ، q عددين صحيحين وأولين نسبيا و $0 < q$

فإن $\lim_{x\to c} h(x) = c^{\frac{p}{q}}$ (حيث $0 < c$ عندما تكون q زوجي) .

البرهان :

نعلم أن $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ فإذا وضعنا $f(x) = x^p$ و $x^{\frac{q}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

و $g(y) = \sqrt[q]{y}$ نجد أن :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[q]{f(x)} = \sqrt[q]{x^p} = h(x)$$

ولذلك فإن $\lim_{x\to c} h(u) = \lim_{x\to c} (g \circ f)(x)$

وباستخدام المبرهنة الخاصة بغاية الدوال المركبة وبعد ملاحظة أن : $\lim_{x\to c} f(x) = c^p$

وأن $\lim_{y\to L} \sqrt[q]{y} = \sqrt[q]{L}$ نجد أن :

$$\lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to c^p} g(y) = \lim_{y\to c^p} \sqrt[q]{c^p} = c^{p/q}$$

مثال :

إذا كانت $h(x) = x^{3/2}$ فإن

$$\lim_{x\to 2} h(x) = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

مسألة 2 - 6 - 3

إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^r-c^r}{x-c}$ حيث $r \ni Q$ فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=r.c^{r-1}$

البرهان:

- إذا كانت $r=0$ فإن $f(x)=\dfrac{1-1}{x-c}=0$ ومنه :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} 0 = 0 = r.c^{r-1} \quad ; (r=0)$$

والتمرين صحيح .

- إذا كان r عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$x^r - c^r = (x-c)\,[\,x^{r-1} + cx^{r-2} + c^2x^{r-3} + \ldots + c^{r-1}]$$

ومنه $f(x) = x^{r-1} + cx^{r-2} + \ldots + c^{r-1}$

وبالاعتماد على غاية الدالة كثيرة الحدود نجد أن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \underbrace{c^{r-1} + c^{r-1} + c^{r-1} + \ldots + c^{r-1}}_{r \text{ مرة}} = r.c^{r-1}$$

- إذا كان r عدداً صحيحاً سالباً فإننا نضع $r=-n$ فيكون n عدداً صحيحاً موجباً وعندئذ نجد أن :

$$f(x)=\frac{x^r-c^r}{x-c}=\frac{x^{-n}-c^{-n}}{x-c}=\frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{c^n}}{x-c}=\frac{c^n-x^n}{c^n.x^n}\cdot\frac{1}{x-c}=\frac{1}{c^n.x^n}\left(-\frac{x^n-c^n}{x-c}\right)$$

ومنه فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\frac{1}{c^n.x^n}\cdot\lim_{x\to c}\left(-\frac{x^n-c^n}{x-c}\right)$$

$$=\frac{1}{c^n.c^n}.\left(-n\,c^{n-1}\right) = -n\,c^{-n-1} = r.c^{r-1}$$

- إذا كانت r عدداً كسرياً ما $\neq 0$ فإنه يكتب على الشكل $r=p/q$ حيث p و q عددان صحيحان أوليان نسبياً و $0<q$ ، ومنه

$$f(x) = \frac{x^{p/q}-c^{p/q}}{x-c} = \frac{(x^{1/q})^p-(c^{1/q})^p}{x-c}$$

فإذا وضعنا $y = x^{1/q}$ و $b = c^{1/q}$

نجد أن $y^q = x$ و $b^q = c$

وعندما يقترب x إلى c فإن y يقترب إلى b ونجد أن :

$$f(x) = \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q} = \frac{y^p - b^p}{y - b} \cdot \frac{y - b}{y^q - b^q} = \frac{y^p - b^p}{y - b} \cdot \frac{1}{\frac{y^q - b^q}{y - b}}$$

ومنه:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{y \to b} \frac{y^p - b^p}{y - b} \cdot \lim_{y \to b} \frac{1}{\frac{y^q - b^q}{y - b}}$$

$$= p.b^{p-1} \cdot \frac{1}{q.b^{q-1}}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot b^{p-q} = r\,(c^{1/q})^{p-q} = r.c^{\frac{p}{q}-1} = r.c^{r-1}$$

مثال :

إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^{3/2} - 2^{3/2}}{x - 2}$

فإن : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{3}{2} \cdot 2^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

مثال :

إذا كانت $f(x) = \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ فأوجد $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

الحل:

إن $f(x) = \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \left(\dfrac{x-1+4}{x-1}\right)^{x-1+3}$

$$= \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^4 = \left[\left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^4 \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^4$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{4}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}$$

حيث $y=\frac{x-1}{4}$ يقترب إلى $+\infty$ عندما يقترب x إلى $+\infty$. ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{4} \cdot \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{4}$$

(حسب 8-3-2)

$$= e^{4} \cdot 1^{4} = e^{4}$$

مثال :

إذا كانت $f(x)=\frac{x^{3}-5x^{2}+7x-3}{2x^{2}-4x+2}$ فأوجد $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل:

عندما x يقترب إلى 1 نجد أن البسط ينتهي إلى الصفر والمقام ينتهي إلى الصفر أي أن $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{0}{0}$ فهي حالة غير محددة . ولكن نلاحظ ان كلٍ من البسط والمقام يحلل إلى حاصل ضرب عاملين أحدهما $x-1$ أي أن :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^{2}-4x+3)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x^{2}-4x+3}{2(x-1)}$$

وعندما x يقترب إلى 1 نجد أيضاً أن البسط ينتهي إلى الصفر والمقام ينتهي إلى الصفر ، أي أننا نحصل من جديد على حالة غير محددة $\frac{0}{0}$ ونحلل البسط إلى حاصل ضرب عاملين أحدهما $x-1$ فنجد أن :

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{2(x-1)}=\frac{x-3}{2}$$

ومنه نجد أن : $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$

7-2 استمرارية الدوال Continuous of Functions

تعريف 2- 7 - 1 :

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة تحتوي النقطة c فإننا نقول إن الدا
f مستمرة عند c إذا تحقق الشرطان :

1 • $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة .

2 • $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

ملاحظة 2- 7 - 2

• نقول إن الدالة f مستمرة من اليمين في النقطة c إذا كان $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

ونقول إن الدالة f مستمرة من اليسار في النقطة c إذا كان $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

وينتج عن هذا التعريف والتعريف (2- 7- 1) - والمبرهنة (2-4-2) أن الدالة f تكو
مستمرة في النقطة c إذا وفقط إذا كانت f مستمرة من اليمين ومن اليسار في النقطة

مثال

هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \ x < 4 \\ 9 & ; \ x = 4 \\ -x+13 & ; \ x > 4 \end{cases}$$

مستمرة في النقطة $c = 4$ ؟

الحل :

لاحظ ان مجال الدالة هو R يحتوي النقطة 4 ثم إن :

$$\text{im}_{\to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} (-3+13) = 9$$

كما إن :

$$\text{im}_{\to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (2x+1) = 9$$

ولذلك فإن $\lim_{x \to 4} f(x)$ موجودة وتساوي 9 .

كذلك فإن $f(4) = 9$ ولذلك فإن $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

إذن فالدالة f مستمرة عند لنقطة 4 .

مثال

الدالة $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ غير مستمرة في النقطة $c = 2$ لأن 2 ليست من مجال هذه الدالة . مع إن غاية هذه الدالة في هذه النقطة موجودة حيث لدينا :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

مثال

هل الدالة $f(x)=\sqrt{-(x-3)^2(x-5)^2}$ مستمرة في النقطة $c = 3$ ؟

الحل:

نلاحظ أن 3 تنتمي إلى مجال f الذي هو $D_f = \{3,5\}$ ولكن لا توجد فتـرة مفتوحة تحوي 3 ومحتواة في مجال f ، ولذلك فإن هذه الدالة غير مستمرة فـي هـذه النقطة.

مثال

الدالة
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; \ x \neq 0 \\ 1 & ; \ x = 0 \end{cases}$$
غير مستمرة في النقطة $c = 0$ لأن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

بينما $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$

ولذلك فإن $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

ونلاحظ أن هذه الدالة مستمرة من اليمين فقط في النقطة 0 لأن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$$

مثال

هل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; \ x<0 \\ 3 & ; \ x=0 \\ 1-x & ; \ x>0 \end{cases}$$

مستمرة في النقطة $c = 0$ ؟

الحل :

إن النقطة 0 هي من مجال f ويوجد فترة مفتوحة تحوي 0 ومحتـــواة فـ

مجال f مثل (-1,1) ولدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

ولذلك فإن $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة وتساوي 1 ، ولكن $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ ولذلك فإن هـ

الدالة غير مستمرة في النقطة 0 .

مثال

إذا كانت f(x) دالة كثير حدود فإن هذه الدالة مستمرة في كل نقطة c من R لأن مجال f هو R ثم ان $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

تعريف 2- 7- 3

- نقول عن دالة f إنها مستمرة على الفترة المفتوحة (α, β) (حيث $\alpha < \beta$) إذا كانت f مستمرة في كل نقطة $c \in (\alpha , \beta)$.
- نقول عن دالة f انها مستمرة على الفترة المغلقة $[\alpha , \beta]$ إذا كانــت f مســتمر على الفترة المفتوحة (α, β) وكانت مستمرة من اليمين في النقطة α ومستمرة مـ اليسار في النقطة β .

مثال

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x<0 \\ 1 & ; \ x\geq 0 \end{cases}$ فإننا نجد بسهولة أن f هــذه غيـ

مستمرة في النقطة 0 لأنهــا غيــر مســتمرة مــن اليســار فــي هــذه النقطــة حيـ

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$ ولذلك فإن هذه الدالة غير مستمرة في أي فترة مفتوحة تحو

النقطة 0 .

في الفترة المغلقة $[0,2]$ نجد أن هذه الدالة مستمرة لأنها مستمرة في الفترة $(0,2)$ ومستمرة من اليمين في النقطة 0 كما أنها مستمرة من اليسار في النقطة 2 .

مبرهنة 2- 8- 1

إذا كانت f و g دالتين مستمرتين في نقطة c فإن :

1 . الدالة $\lambda f + \mu g$ مستمرة في c مهما كان العددان الحقيقيان λ و μ .

2 . الدالة $f.g$ مستمرة في c .

3 . الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة في c تحت شرط $g(x) \neq 0$ لكل x في فترة مفتوحة تحوي c

ملاحظات 2 - 8 - 2

أ . يمكن تعميم 1 و 2 من المبرهنة السابقة على أي عدد منته من الدوال .

ب . يمكن ان نستخلص من المبرهنة السابقة الحالات الخاصة التالية :

1 . إذا أخذنا $\lambda = \mu = 1$ فإننا نجد انها إذا كانت f و g دالتين مستمرتين في نقطة c فإن مجموعهما $f+g$ تكون مستمرة في c .

2 . إذا أخذنا $\lambda = 1$ و $\mu = -1$ نحصل على أن حاصل طرح دالتين مستمرتين في نقطة c هي دالة مستمرة في c .

3 . إذا أخذنا $\lambda = a$ (ثابت) و $\mu = 0$ نحصل على أن حاصل ضرب دالة مستمرة في c بثابت عددي هي دالة مستمرة في c .

مثال

بين استمرارية الدالة $h(x) = x^2\sqrt{x} + \ln x$ في النقطة $c = 1$.

الحل :

إذا وضعنا $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $k(x) = \ln x$ نجد أن

$f(x)$ مستمرة في النقطة 1 لأن $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1 = f(1)$

$g(x)$ مستمرة في النقطة 1 لأن $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = g(1)$

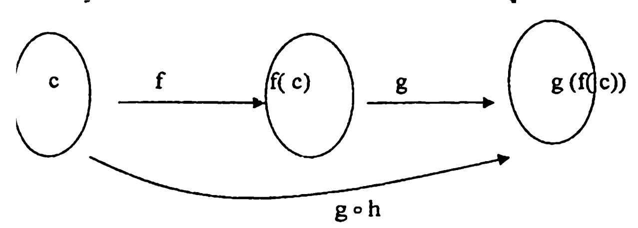
$k(x)$ مستمرة في النقطة 1 لأن $\lim_{x \to 1} k(x) = \lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = k(1)$

ولذلك فإنه ينتج عن (2) من المبرهنة السابقة أن $f(x) . g(x) = x^2 \sqrt{x}$ مستمرة في النقطة 1 كما ينتج عن (1) من المبرهنة السابقة أن :

$f(x).g(x) + k(x) = x^2 \sqrt{x} + \ln x$ مستمرة في النقطة 1 ، إذن $f(x)$ مستمر في النقطة 1 .

مبرهنة 2- 8 - 3

إذا كانت f دالة مستمرة في النقطة c وكانت g دالة مستمرة في النقطة $f(c)$ فإن الدالة $g \circ h$ تكون مستمرة في النقطة c .



مثال

وضح استمرارية للدالة $h(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ في النقطة $c = 2$.

الحل :

إذا وضعنا $f(x) = x^2 + 2x + 3$ نجد أن الدالة f مستمرة في النقطة 2 لانها دالة كثيرة حدود .

وإذا فرضنا $g(y) = \ln y$ نجد ان الدالة g مستمرة في النقطة $f(2) = 11$ لأن :

$$\lim_{y \to 11} g(y) = \lim_{y \to 11} \ln y = \ln 11 = g(11)$$

ولذلك فإنه ينتج عن المبرهنة السابقة أن $(g \circ h)(x)$ مستمرة في النقطة 2 ولكن :

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \ln(f(x)) = \ln(x^2 + 2x + 3) = h(x)$$

إذن $h(x)$ مستمرة في النقطة 2 .

مبرهنة 2- 8- 4

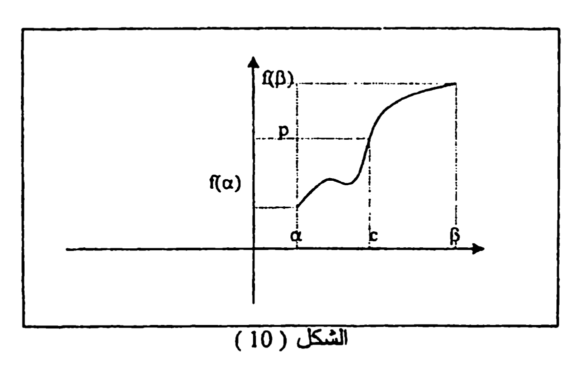
إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة ومحدودة $[\alpha, \beta]$ فإن f ستكون محدودة على هذه الفترة . وسيوجد b , a من $[\alpha, \beta]$ بحيث يكون :

$$f(a) = \min \{ f(x) \; ; \; x \in [\alpha, \beta] \}$$

$$f(b) = \max \{ f(x) \; ; \; x \in [\alpha, \beta] \}$$

مبرهنة القيمة الوسطى 2- 8 - 5

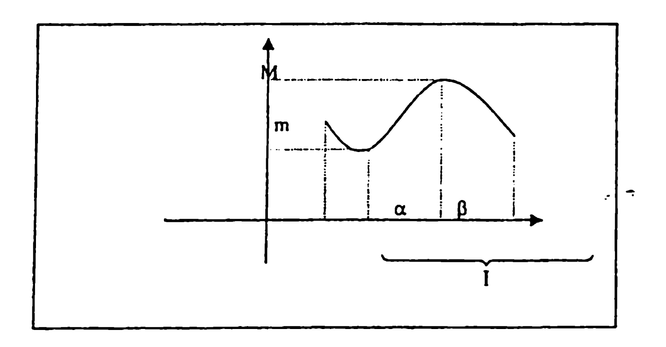
إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة ومحدودة $[\alpha , \beta]$ فإن f ستأخذ – مرة واحدة على الأقل – كل قيمة محصورة بين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ أي أنه إذا كانت p نقطة تحقق $f(\alpha) \leq p \leq f(\beta)$ [أو $f(\beta) \leq p \leq f(\alpha)$] فإنه يوجد c في الفترة $[\alpha , \beta]$ بحيث يكون $f(c) = p$.



الشكل (10)

ملاحظات 2 - 8 - 6

أ • ينتج عن المبرهنة السابقة أنه إذا كانت f دالة مستمرة على فترة غير خالية I وكانت f يبلغ في هذه الفترة قيمة عظمى M وقيمة صغرى m أي أنه يوجد α و β من I بحيث يكون $f(\alpha) = m$ و $f(\beta) = M$ فإن f ستأخذ في الفترة I – مرة واحدة على الأقل – كل قيمة محصورة بين m و M كما يوضح الشكل التالي



الشكل (11)

ب . ينتج عن المبرهنة لسابقة أيضا أنه إذا كانت f دالة مستمرة على فترة غير خالية I وكان α و β من I بحيث أن $f(\alpha) . f(\beta) < 0$ فإنه يوجد c من R يقع بين α و β بحيث يكون $f(c) = 0$ أي أنه يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واقع بين العددين α و β لأن :

$f(\alpha) . f(\beta) < 0$ يعني أن أحد العددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ سالبا والآخر موجباً

ولذلك فإن العدد $p = 0$ يقع بين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ ولنفرض أن $f(\alpha) \leq 0 \leq f(\beta)$ وبحسب المبرهنة فإنه يوجد c من $[\alpha, \beta]$ بحيث يكون $f(c) = 0$.

مثال

أثبت ان للمعادلة $x^3 - 2 = 0$ جذراً محصور بين 1 و 2 .

الحل:

نلاحظ أن الدالة $f(x) = x^3 - 2$ مستمرة على الفترة $[1,2]$ لأنها دالة كثيرة حدود .

ولدينا $f(1) . f(2) = (-1) . (6) = -6 < 0$ ولذلك فإن للمعادلة $f(x) = 0$ أي $x^3 - 2 = 0$ جذر يقع بين 1 و 2 بحسب الملاحظة ب السابقة .

تمارين

- في التمارين 1 إلى 10 ، اعتمد على تعاريف الغايات لتبرهن على أن :

1. $\lim_{x \to 1} 3x - 2 = 1$
2. $\lim_{x \to 2} \frac{3x + 2}{2} = 4$
3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x - 1} = 1$
4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$
5. $\lim_{x \to -1} \frac{x}{x + 1} = -\infty$
6. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x - 1} = -\infty$
7. $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x - 3)^2} = +\infty$
8. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & ; \ x < 0 \\ 2x + 2 & ; \ x > 0 \end{cases}$ فإن : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$

9. إذا كانت $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ فإن $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$.

10. إذا كانت $f(x)=\sqrt{5-x}$ فإن $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=0$

- في التمارين 11 إلى 29 ، أوجد إن امكن الغايات المطلوبة.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{x^3+3}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2+|x-2|)$

13. $\lim\limits_{x\to 2}(-x+2+|x-2|)$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x^2-16)}{(x+4)^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}$

17. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}}{x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x^3+2x^2-1)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|+1}$

21. $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}$

23. $\lim\limits_{x\to 1}e^{x^2-1}$

24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x-x^2+1}{2x^2+5}$

25. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^3-x}{3x-x^3}$.

26. $\lim\limits_{x\to}\frac{x^{3/2}-2\sqrt{2}}{x^{5/2}-4\sqrt{2}}$

27. $\lim\limits_{x\to -4^+}\frac{|x+4|}{x+4}$

28. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+x}$

29. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+5}$

- في التمارين 30 إلى 39 ، ادرس استمرارية كل من الدوال المذكورة في النقطة c المبينة إلى جانب كل منها . (وكذلك الاستمرارية من أحد الجوانب) .

30. $f(x)=\begin{cases} x & ;x\le 0 \\ \frac{1}{x} & ;x>0 \end{cases}$ ؛ $c=0$

31. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; x>0 \\ x+1 & ; x\le 0 \end{cases}$ ؛ $c=1$

32. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|-x}{x} & ; x\ne 0 \\ -2 & ; x=0 \end{cases}$ ؛ $c=0$

33. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\le 1 \\ \ln x & ; x>1 \end{cases}$ ؛ $c=1$

34. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-5|}{x-5} & ; x\ne 5 \\ 1 & ; x=5 \end{cases}$ ؛ $c=5$

35. $f(x)=e^{x^2+2x-1}$ ؛ $c=0$

36. $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+1}$ ؛ $c=-1$

37. $f(x)=\ln(x^5+2x-1)$ ؛ $c=2$

38. $f(x)=x^2\sqrt{x^2-x^4}$ ؛ $c=1$

39. $f(x)=\sqrt{x-2}$ ؛ $c=2$

• في التمارين 40 إلى 49 ، عين مجموعة النقط التي تكون فيها الدالة المذكور غير مستمرة .

40. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

41. $f(x)=\dfrac{x-2}{x(x+1)(x^2-4)}$

42. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

43. $f(x)=x-x_1$ حيث x_1 هو أكبر عدد صحيح أصغر من x .

44. $f(x)=\sqrt{-(x-1)^2(x+1)^2}$

45. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \forall x>0 \\ x+1 & \forall x<0 \end{cases}$

46. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$

47 • $f(x)=\frac{x^2}{2+x^2}$

48 • $f(x)=\ln(x+1)$

49 • $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}-1}$

• في التمارين 50 إلى 54 ، بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة مستمرة على الفترة I المذكورة إلى جانبه .

50 • $f(x)=\frac{1-x}{1+x^2}$ ؛ $I=(\infty,\infty)$

51 • $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ ؛ $I=[-1,1]$

52 • $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}$ ؛ $I=(0,1)$

53 • $f(x)=\ln(x+1)$ ؛ $I=(-1,1)$

54 • $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $I=[-1,0)$

• في التمارين 55 إلى 59 ، برهن على أن للمعادلة المعطاة جذرا واحدا على الأقل في الفترة المذكورة إلى جانب كل معادلة .

55 • $x^2+\frac{1}{x}=1$ ؛ $[-2,5]$

56 • $x^4-x+1=0$ ؛ $[-1,1]$

57 • $x^5+x^3+x^2-1=0$ ؛ $[0,1]$

58 • $e^x-1=0$ ؛ $[-1,1]$

59 • $x^2+\frac{1}{2x}=2$ ؛ $[\frac{1}{4},1]$

الفصل الثالث

المشتقات

الفصل الثالث

المشتقات

3 - 1 المشتقة الأولى

تعريف 3 - 1 - 1

إذا كانت a نقطة من مجـال الدالـة f وكانـت $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجـودة ومحدودة فإننا نسمي هذه الغاية مشتقة الدالة f في النقطة a ونرمـز لهـا بـالرمز $f'(a)$ ونكتب :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (1)$$

ونقول في هذه الحالة ، إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a .

مثال

إذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ فأوجد $f'(2)$

الحل :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ملاحظات 3 - 1 - 2

أ - إذا كانت الغاية $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة ، أو غير محدودة، فإننا نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة a فالدالة $f(x)=x^{1/3}$ - مثلا - هي دالـة معرفـة ومستمرة في النقطة $a=0$ لأن :

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to 0}x^{1/3}=0=f(0)$$

ولكن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق في هذه النقطة لأن :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3}-0}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}}$$

فهذه الغاية غير محدودة .

ب • تستعمل – أحياناً – صيغ للاشتقاق غير الصيغة (1) الواردة في التعريف السابق ؛ فإذا وضعنا $h = x - a$ نجد أن $x = a + h$ وعندما $x \to a$ فإن $h \to 0$ وبالتعويض في الصيغة (1) نحصل على الصيغة :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

وهناك صيغ أخرى سنذكرها لاحقا .

مثال

استخدم الصيغة (2) لايجاد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 - 1$ في النقطة $a = 1$

الحل :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

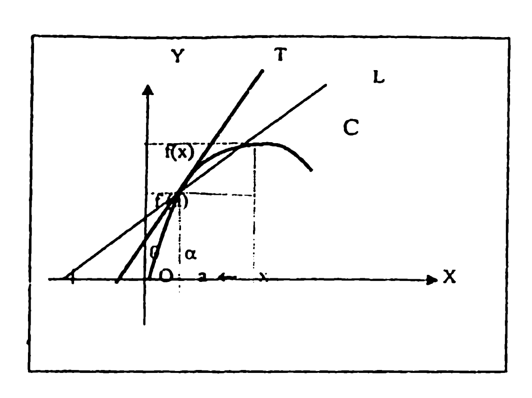
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^2-1]-[(1)^2-1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2-1-0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2+h}{1} = 2$$

3-1-3 المعنى الهندسي للمشتقة والمماس لمنحنى الدالة

إذا كان C منحنى الدالة f وكانت $(a, f(a))$ و $(x, f(x))$ نقطتين من C وكان L المستقيم المار من هاتين النقطتين فإننا نلاحظ من الشكل الهندسي التالي أن L هو مستقيم قاطع للمنحي C وأن L يصنع مع المحور ox زاوية θ وان $\tan\theta = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$



الشكل (1)

أي أن النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تمثل ميل المستقيم L المار من النقطتين $(a, f(a))$ و $(x, f(x))$ والقاطع للمنحنى C .

وعندما تقترب x الى a فإن المستقيم L يؤول الى المستقيم T الـذي يمثـل **المماس للمنحنى** C في النقطة $(a, f(a))$ ، كما ان النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقترب إلى $\tan\alpha$ الذي هو **ميل المماس** T . ومعنى هذا أن :

$f'(a)$ = ميل مماس المنحنى C في النقطة $(a, f(a))$. ولما كنا نعلم كيف نوجد معادلة مستقيم علم ميلـه و نقطة منه (انظر 1-5) فإننا نستطيع أن نوجد معادلة المماس للمنحنى C في النقطة $(a, f(a))$.

مثال

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ في النقطة $(1,0)$

الحل :

إذا رمزنا بـ m لميل المماس المطلوب فإنه ينتج عما تقدم أعلاه أن :

$$m=f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x^3 - 3x + 1) - (0)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x - 1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (2x^2 + 2x - 1) = 3$$

بالتعويض في الصيغة العامة لمعادلة المستقيم التي هي :

$y = mx + c$

نحصل على $y = 3x + c$

وبما أن هذا المستقيم يمر من نقطة التماس $(1,0)$ فإن هذه النقطة تحقق هذه المعادلة ،

ولذلك فإن $0 = 3x + c$

ومنه نجد أن $c = -3$ وبالتالي فإن معادلة المماس المطلوب هي $y = 3x - 3$.

ملاحظة 3 - 1 - 4

إذا كانت f دالة مستمرة في النقطة a وكانت

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$$

فإن هذا يعني هندسيا – أن المماس لمنحنى f في النقطة $(a, f(a))$ هو مستقيم عمودي على المحور ox ولذلك فإن معادلته هي : $x = a$.

مثال

إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{x}$ فإن f مستمرة في النقطة 0 لأن :

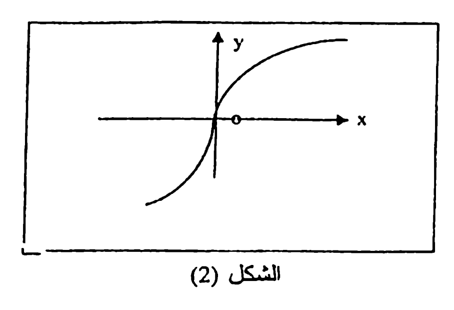
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0)$$

ولكن

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

ولذلك فإن المماس لمنحنى هذه الدالة في النقطة $(0, f(0))$ عمودي على المحور ox ومعادلته هي $x = 0$.

ويوضح الشكل التالي منحنى هذه الدالة ومماسه في النقطة 0 الذي هو المحور $0y$ نفسه.



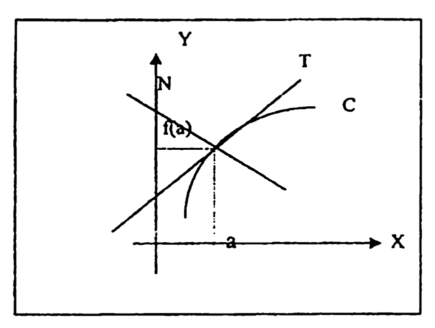
الشكل (2)

5 - 1 - 3 الناظم لمنحنى دالة

إذا كان C منحنى الدالة f فإن المستقيم العمودي لمماس C في النقطة $(a, f(a))$ يسمى بناظم المنحنى C في هذه النقطة ويرمز له بالرمز N .

ومن دراسة موضوع المستقيم في (1-5) نجد أن ميل هذا الناظم الذي سنرمز له بـ m_1 يعطى بالعلاقة $m_1 = -\frac{1}{m}$ حيث m هو ميل مماس C في النقطة $(a, f(a))$.

ولذلك فإننا نستطيع إيجاد معادلة هذا الناظم نظراً لأننا نعرف ميله m_1 ونعرف نقطة منه وهي $(a, f(a))$.



الشكل (3)

مثال

أوجد معادلة الناظم لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ في النقطة $(2,5)$.

الحل :

إن ميل المماس لمنحنى الدالة في النقطة $(2,5)$ هو :

$$m = f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+1)-(5)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

ولذلك فإن ميل الناظم المطلوب هو $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{4}$

بالتعويض في المعادلة $y = m_1 x + c$

نحصل على المعادلة $y = -\frac{1}{4}x + c$

وبما أن هذا الناظم يمر من النقطة $(2,5)$ فإن :

$$5 = -\frac{1}{4}\times 2 + C$$

ومنه فإن $C = \frac{11}{2}$ ، وبالتالي فإن معادلة الناظم المطلوب هي :

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$ أو $4y + x - 22 = 0$

3 - 2 المشتقة من اليمين ومن اليسار

قد لا نستطيع حساب الغاية $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مباشرة ، وإنما نستطيع حساب هـذه الغاية من اليمين أو من اليسار أو من اليمين و اليسار (كما ورد في بحث النهايات) فمثلاً لو كان عندنا الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \le 0 \\ x & ;\ x > 0 \end{cases}$$

وأردنا حساب مشتقة هذه الدالة في النقطة 0 فإننا لا نستطيع إيجاد المشتقة مباشرة لأن :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} x & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x > 0 \end{cases}$$

ولذلك فإن :
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x = 0$$

بينما
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} 1 = 1$$

في مثل هذه الحالة ، نتحدث عن المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار للدالة f في النقطة a ، التي نعرفها كما يلي :

تعريف 3 - 2 - 1

إذا كانت a نقطة من مجال الدالة f وكانت $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجودة ومحدودة ، فإننا نسمي هذه الغاية بمشتقة الدالة f من اليمين في النقطة a ونرمز لها بالرمز $f'(a^+)$

وإذا كانت $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجودة ومحدودة ، فإننا نسمي هذه الغاية بمشتقة الدالة f من اليسار في النقطة a ونرمز لها بالرمز $f'(a^-)$ ، أي أن :

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$f'(a^-)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال

أوجد المشتقة من اليمين والمشتقة من اليسار للدالة $f(x)=|x|$ في النقطة 0 .

الحل:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} 1 = 1$$
$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} -1 = -1$$

ونلاحظ أن $f'(0^+)\neq f'(0^-)$

2-2-3 ملاحظات

أ - إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق من اليمين (اليسار) في النقطة a فإنها تكون مستمرة من اليمين (اليسار) في a ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً .

البرهان :

(نبرهن حالة إلى اليمين)

إن المطلوب هو أن نبرهن على أن $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ أي $\lim_{x\to a^+} [f(x) - f(a)] = 0$

وبما أن f قابلة للاشتقاق من اليمين في a فإن

$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^+)$ عدد محدود ومنه

$$\lim_{x\to a^+} [f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \, . \, (x-a)\right]$$

$$= \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a^+}(x-a)$$
$$= f'(a^+) \, .0 \; = 0$$

مثال عن العكس : الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستمرة من اليمين في النقطة 0 لأن :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

ولكن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق من اليمين في النقطة 0 لأن :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

إذن فغاية النسبة $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ عندما x تقترب إلى الصفر من اليمين غير محدودة ولذلك فإن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق من اليمين في النقطة 0 .

ب - ينتج عن دراسة النهايات (2-4-2) أن الدالة f تكون قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وفقط إذا كانت f مستمرة وقابلة للاشتقاق من اليمين ومن اليسار في a وكانت $f'(a^+) = f'(a^-)$.

وفي حالة كون f قابلة للاشتقاق في a يكون : $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$

أمثلة

1. الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\le 0 \\ x & ; x>0 \end{cases}$

قابلة للاشتقاق من اليمين في النقطة 0 ولدينا $f'(0^+)=1$ وهي قابلة للاشتقاق من اليسار في هذه النقطة ولدينا $f'(0^-)=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 لأن $f'(0^+)\neq f'(0^-)$.

2. الدالة $f(x)=\sqrt{x^3}$ قابلة للاشتقاق من اليمين في النقطة 0 لأن :

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

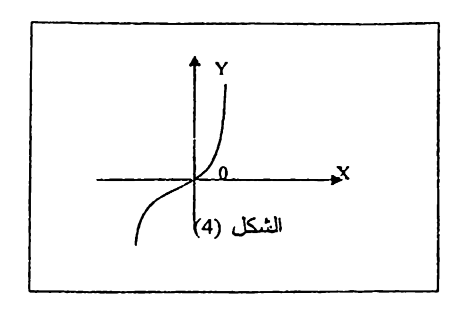
ولكن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق من اليسار في النقطة 0 لأنها غير معرفة على يسار الصفر أي أن $f(x)$ غير موجود عندما تكون $x<0$. وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 .

3. الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x>0 \\ x^3 & ; x\le 0 \end{cases}$

قابلة للاشتقاق من اليمين ومن اليسار في النقطة 0 ومستمرة فيها ولدينا $f'(0^+)=f'(0^-)=0$ ولذلك فإن هذه الدالة قابلة للاشتقاق في النقطة 0 ولدينا $f'(0)=0$ لاحظ أن:

$$f'(0^+)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$f'(0^-)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^2=0$$



الشكل (4)

3 – 3 بعض قوانين الاشتقاق

مبرهنة 3 - 3 -1

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق في النقطة a وكان λ و μ عددين ثابتين فإنه :

I. الدالة $\lambda f+\mu g$ قابلة للاشتقاق في a ولدينا :

$$(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda \,.\, f'(a)+\mu .\, g'(a)$$

II. الدالة $f.g$ قابلة للاشتقاق في a ولدينا

$$(f.g)'(a)=f'(a)\,.\,g(a)+f(a)\,.\,g'(a)$$

III. إذا كان $g(a)\neq 0$ فإن الدالة $\dfrac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق في a ولدينا :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a).g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$$

البرهان :

• I

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\left[\lambda\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\mu\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\&=\lambda\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\mu\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=\lambda\,.\,f'(a)+\mu .\,g'(a)\end{aligned}$$

• II

$$(f.g)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(f.g)(x)-(f.g)(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(a).g(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x).g(x)-f(a).g(x)+f(a).g(x)-f(a).g(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$=f'(a).g(a)+f(a).g'(a)\ ^{(1)}$$

• III

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)\ g(x).g(a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)\ g(x).g(a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\frac{1}{g(x)}-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\frac{f(a)}{g(x).g(a)}\right]$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}-\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(x).g(a)}$$
$$=f'(a).\frac{1}{g(a)}-g'(a).\frac{f(a)}{g(a).g(a)}$$
$$=\frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{[g(x)]^2}.$$

2 - 3 - 3 ملاحظات

أ • إذا اخترنا λ و μ بشكل مناسب نحصل على بعض القواعد الخاصة في الاشـــتقاق ، نذكر منها القواعد التالية :

• إذا أخذنا $\lambda = \mu = 1$ فإننا نجد أن $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

• إذا أخذنا $\lambda = 1$ و $\mu = -1$ فإننا نجد أن $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

• إذا أخذنا $\lambda = c$ و $\mu = 0$ فإننا نجد أن $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$

ب • يمكن تعميم القاعدتين I و II من المبرهنة السابقة - بطريقة الاستقراء الرياضي - على أي عدد منته من الدوال ؛ بالشكل التالي :

إذا كانت $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ مجموعة دوال قابلة للاشتقاق في النقطة a وكانت $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ مجموعة أعداد ثابتة فإن :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f'(a) \qquad \ldots (I^{*})$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{n}\left[f_i'(a) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} f_j(a)\right] \qquad \ldots (II^{*})$$

وبصورة خاصة : إذا كان $f_1 = f_2 = \ldots = f_n$ فإن القاعدة الأخيرة تأخذ الصيغة التالية :

$$\left(f^{n}\right)'(a) = n\left[f^{n-1}\right](a) \cdot f'(a) \qquad \ldots (III^{*})$$

أمثلة

1• إذا كان $h(x) = 3x^2 + 5\sqrt{x}$ فأوجد $h'(2)$.

الحل :

نضع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ و $\lambda = 3$ و $\mu = 5$ ونطبق القاعدة الأولى من المبرهنة السابقة حيث نجد بسهولة أن $f'(2) = 4$ و $g'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

ولذلك فإن : $h'(2) = 3\times 4 + 5\times\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{24\sqrt{2}+5}{2\sqrt{2}}$

2 • إذا كان $h(x) = x^3 \cdot \sqrt{x}$ فأوجد $h'(2)$.

الحل :

نضع $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ونطبق القاعدة الثانية من المبرهنة السابقة حيث نجد بسهولة أن $f'(2) = 12$ و $g'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ولذلك فإن :

$$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2) = 12\sqrt{2} + 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$$

3 • إذا كانت $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3+2}$ فأوجد $h'(1)$.

الحل :

نضع $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=x^3+2$ ونطبق القاعدة الثالثة من المبرهنة السابقة حيث أن $f'(1)=2$ و $g'(1)=3$ ولذلك فإن

$$h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{[g(1)]^2}=\frac{2\times 3-2\times 3}{[3]^2}=0$$

3 - 4 الاشتقاق على فترة

تعريف 3 - 4 - 1

- نقول عن دالة f إنها قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة (α, β) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x من (α, β).
- نقول عن f إنها قابلة للاشتقاق على فترة مغلقة $[\alpha, \beta]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (α, β) وكانت قابلة للاشتقاق من اليمين على α ومن اليسار في β .
- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (α,β) وإذا قابلنا كل x من (α, β) بالعدد $f'(x)$ فإننا نحصل على دالة f' نسميه الدالة المشتقة للدالة f على الفترة (α, β) ونرمز لها :

$$f' : (\alpha, \beta) \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f'(x)$$

وان مجال الدالة f' هو مجموعة كل النقاط من مجال f التي تكون فيها f قابلة للاشتقاق ، أي أن مجال الدالة f' $\supseteq$ مجال الدالة f .

ملاحظات 3 - 4 - 2

أ • نحصل على الدالة المشتقة $f'(x)$ بإحدى الطرق التالية:

1 • نوجد $f'(a)$ لنقطة اختيارية a من مجال f ثم نبدل في النتيجة كل a بـ x .

2 • نوجد $f'(x)$ من الصيغة $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3 • نوجد $f'(x)$ من الصيغة $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$

ب . نعطى الدالة f فى كثير من الأحيان على الشكل $y = f(x)$ وفي هذه الحالة يأخذ الدالة المشتقة الصيغة $y' = f'(x)$ وتستخدم أحيانا رموز ليبنز Leibniz في دراسة الاشتقاق حيث تستبدل الإشارة (′) بالرمز $\frac{d}{dx}$ فنكتب $\frac{df(x)}{dx}$ بدلاً من $f'(x)$ و $\frac{dy}{dx}$ بدلاً من y'

أمثلة

1 . الدالة $f(x) = x^2$ قابلة للاشتقاق في كل نقاط مجالها ودالة المشتقة هي :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h\ =2x$$

ونلاحظ أن مجال f' في هذا المثال يساوي مجال f .

2 . الدالة $f(x) = |x|$ قابلة للاشتقاق في كل نقاط مجاله عدا النقطة 0 فهي غير قابلة للاشتقاق فيها ، ويمكن أن نرى أن الدالة المشتقة لهذه الدالة هي :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

ونلاحظ أن مجال $f = R$ بينما مجال $f' = R\backslash\{0\}$

3 . إن مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ هو $[0, \infty)$ وإن هذه الدالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة $0 < a$ لأن :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

ولكن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 التي هي من مجالها ، ولذلك فإن الدالة المشتقة لهذه الدالة هو : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ وان مجال f' هو $(0, \infty)$.

3 - 4 - 3 الدوال المشتقة لبعض الدوال الهامة

قلنا إنه عند إيجاد الدالة المشتقة لدالة f نوجد $f'(a)$ لنقطة اختيارية a من مجال f ثم نبدل a بالمتغير x ولذلك فإن قواعد الاشتقاق الواردة في (3-3-1) تبقى صحيحة عند إيجاد $f'(x)$ وبالاستفادة من هذه القواعد يمكن إيجاد الدوال المشتقة التالية:

1. إذا كانت $f(x) = c$ حيث c ثابت عددي فإن $f'(x) = 0$ لكل x من R .
2. إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$ لكل x من R.
3. إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث $n \in N$ فإن $f'(x) = n x^{n-1}$ لكل x من R .
4. إذا كانت $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ دالة كثيرة حدود فإن :
   $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_nx^{n-1}$ لكل x من R .
5. إذا كانت $f(x) = x^r$ حيث $r \in R$ فإن :
   $f'(x) = r x^{r-1}$ لكل x يكون من أجلها $f'(x)$ معرفة .
6. إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن $f'(x) = \cos x$
   وإذا كانت $f(x) = \cos x$ فإن $f'(x) = -\sin x$ لكل x من R.

3 - 5 اشتقاق الدوال المركبة (قاعدة السلسلة)

مبرهنة 3 - 5 - 1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وكانت g دالة قابلة للاشتقاق في النقطة $f(a)$ فإن الدالة $g \circ f$ تكون قابلة للاشتقاق في a ولدينا :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

البرهان :

إذا وضعنا $y = f(x)$ و $b = f(a)$ فإنه ينتج عن الفرض f قابلة للاشتقاق في a أن f مستمرة في a ، ولذلك فإنه عندما تقترب x إلى a فإن y تقترب إلى b ، ومنه :

$$(g.f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(g.f)(x) - (g.f)(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x) - g(f(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{y\to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= g'(b) \,.\, f'(a) = g(f(a)) \,.\, f'(a).$$

ملاحظة 3 - 5- 2

إذا عدنا الآن إلى الدالة المشتق حيث جعلنا $a = x$ نقطة متغيرة ، فـإن المبرهنة السابقة تعطينا القاعدة التالية الهامة في حساب المشتقات والتي تسمى عادة بقاعـدة السلسلة :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

وإذا وضعنا $y = f(x)$ و $u = g(y)$ فإننا نجد :

$$u = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

وتأخذ قاعدة السلسلة باستخدام رموز ليبنز الصيغة التالية :

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

- لقاعدة السلسلة صيغة أخرى هي :

إذا كانت f دالة في المتغير t وكانت t دالة في المتغير x فإن f ستتبع المتغير x ويكون :

$$\frac{df(t)}{dx} = \frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- يمكن توسيع القاعدة السابقة لتأخذ صيغة سلسلة على الشكل التالي :

إذا كانت f دالة في المتغير t وكانت t دالة في المتغير u وكانت u دالة تتبع المتغير x فإن :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أمثلة

1• إذا كانت $h(x)=\sqrt{x^2+2x}$ فأوجد $h'(x)$.

الحل :

نضع $y=f(x)=x^2+2x$ و $g(y)=\sqrt{y}$ فنجد أن :

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2+2x}=h(x)$$

ولذلك فإن :

$$h'(x)=(g\circ f)'(x)=g'(f(x)).f'(x)=g'(y).f'(x)$$

ولكن : $g'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $f'(x)=2x+2$

ولذلك فإن : $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}.(2x+2)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}.(2x+2)$

• يمكن تعميم هذا المثال في إعطاء قاعدة عامة لاشتقاق الدوال الجذرية هي :

$$y=\sqrt{f(x)} \Rightarrow y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

2 • إذا كانت $y=f(x)$ فإنه ينتج عن قاعدة السلسلة أن :

$$\frac{dy^2}{dx}=\frac{dy^2}{dy}.\frac{dy}{dx}=2y.y'$$

$$\frac{dy^3}{dx}=\frac{dy^3}{dy}.\frac{dy}{dx}=3y^2.y'$$

....

$$\frac{dy^n}{dx}=\frac{dy^n}{dy}.\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}.y'$$

• إذن لدينا القاعدة التالية :

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n=n\,[f(x)]^{n-1}.f'(x)$$

مثال

$$\frac{d}{dx}[x^2+5x-2]^3=3\,[x^2+5x-2]^2.(2x+5)$$

3 - 6 اشتقاق معكوس الدالة

إن معكوس الدالة f هي دالة g تحقق :

$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ و $f(g(x)) = x$ ومنه $g(f(x)) = x$

مبرهنة 3 - 6 - 1

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a وكانت $f'(a) \neq 0$

فإن الدالة المعكوس g تكون قابلة للاشتقاق في النقطة $b = f(a)$ ويكون لدينا :

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

البرهان :

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{x - a}{y - b}$$

$$= \lim_{f(x) \to f(a)} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

وبما أن الدالة g مستمرة في f (a) لأنها قابلة للاشتقاق فيها ، فإنـــها عندما تقتــرب f (x) إلى f (a) ، تقترب g (f (x)) إلى g (f (a)) أي أن x يقترب إلـــى a ولـــذلك فإن :

$$g'(b) = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

ملاحظات 3- 6 - 2

أ • إذا عدنا إلى الدالة المشتقة حيث $a = x$ نقطة متغيرة و $b = y$ نجد أن قاعدة اشتقاق الدالة العكسي هي :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

حيث $y = f(x)$ و $g = f^{-1}$ هي الدالة العكسية للدالة f .

ب• إذا لاحظنا أن $y = f(x)$ و $x = g(y)$ فإن القاعدة السابقة تكتب – باستخدام رموز ليبنز ـ على الشكل التالي :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

جـ • لإيجاد $(f^{-1})'(b)$ يجب إيجاد النقطة a التي تحقق $f(a) = b$ وعندئذ يكون

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال

إذا كانت $f(x) = x^4 + 8x^3 + 4x - 2$ فأوجد $(f^{-1})'(-2)$

نوجد النقطة a التي تحقق $f(a) = -2$

فنجد أن $a = 0$ ومن ثم نوجد $f'(0) = 4$ ومنه يكون

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$$

3 - 7 اشتقاق الدوال الأسية

- سنقبل بدون برهان أن : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

مبرهنة 3 - 7 - 1

إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن $f'(x) = e^x$

البرهان :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$
$$= e^x . 1 = e^x$$

3 - 7 - 2 نتائج وتطبيقات

1• إذا كانت $h(x) = e^{f(x)}$ فإن $h'(x) = e^{f(x)} . f'(x)$

البرهان :

نضع $y = f(x)$ و $g(y) = e^y$ فنجد أن :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = h(x)$$

ولذلك فإن : $h'(x) = (g \circ f)'(x)$

ومن قاعدة السلسلة نجد أن : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) . f'(x)$

وينتج عن المبرهنة السابقة أن $g'(y) = e^y$ ولذلك فإن $g'(f(x)) = e^{f(x)}$

إذن $(g \circ f)'(x) = e^{f(x)} . f'(x)$ أي أن $h'(x) = e^{f(x)} . f'(x)$

تطبيق :

إذا كانت $h(x) = e^{x^3+x-1}$ فإن $h(x) = e^{f(x)}$ حيث $f(x) = x^3 + x - 1$

ولذلك فإن $h'(x) = e^{x^3+x-1} . (3x^2 + 1)$.

• 2 إذا كانت $h(x) = a^x$ حيث $0 < a$ فإن $h'(x) = ax . \ln a$.

البرهان :

من دراسة الدوال الأسية نعلم أن :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

ومنه $y = e^{\ln y}$

نجد أن : $a^x = e^{\ln a^x}$

أي أن :

$$h(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x.\ln a} = e^{f(x)}$$

حيث $f(x) = x.\ln a = \ln a^x$

وبتطبيق النتيجة 1 السابقة نجد أن :

$$h'(x) = e^{f(x)} . f(x) = e^{\ln a^x} . \ln a = a^x . \ln a$$

تطبيق :

إذا كانت $h(x) = 3^x$ فإن $h'(x) = 3^x . \ln 3$

• 3 إذا كانت $h(x) = a^{f(x)}$ حيث $0 < a$ فإن $h'(x) = a^{f(x)} . f'(x) . \ln a$

البرهان:

نضع $y = f(x)$ و $g(y) = a^y$ فنجد أن $(g_o f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = h(x)$

ولذلك فإن $h'(x) = (g \circ f)'(x)$

ومن قاعدة السلسلة نجد أن : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$

ومن النتيجة 2 السابقة لدينا : $g'(y) = a^y . \ln a$

ولذلك فإن : $g'(f(x)) = a^{f(x)} . \ln a$

إذن : $(g_o f)'(x) = a^{f(x)} . \ln a . f'(x)$

أي أن : $h'(x) = a^{f(x)} . \ln a . f'(x) = a^{f(x)} . f'(x) \ln a$

تطبيق :

إذا كانت $h(x) = 3^{x^2-2x}$ فإن $h'(x) = 3^{x^2-2x}(2x-2).\ln 3$.

3 - 8 اشتقاق الدوال اللوغاريتمية

مبرهنة 3 - 8 - 1

إذا كانت $f(x) = \ln x$ فإن $f'(x) = \frac{1}{x}$

البرهان :

نضع $y = f(x) = \ln x$ فيكون $x = e^y$ ومن قاعدة اشتقاق الدوال الأسية نجـد:

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

ومن قاعدة اشتقاق الدالة العكسي نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

أي أن $f'(x) = \frac{1}{x}$.

نتائج 3 - 8 - 2

1 • إذا كانت $h(x) = \ln f(x)$ فإن $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

البرهان :

نضع $y = f(x)$ و $g(y) = \ln y$

فنجد ان : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = h(x)$

ولذلك فإن : $h'(x) = (g \circ f)'(x)$

ومن قاعدة السلسة نجد أن : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\ f'(x)$

وينتج عن المبرهنة السابقة أن :

$$g'(y)=\frac{1}{y}$$

إذن :

$$g'(f(x))=\frac{1}{f(x)}$$

$$(g\circ f)'(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

تطبيق :

إذا كان $h(x)=\ln(x^3+2x)$ فإن $h'(x)=\frac{3x^2+2}{x^3+2x}$

2 • إذا كان $h(x)=\log_a x$ حيث $0<a\neq 1$

فإن $h'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$

البرهان :

نضع $y=\log_a x$ فيكون $x=a^y$

ومن قواعد اشتقاق الدوال الأسية نجد أن : $\frac{dx}{dy}=a^y\cdot\ln a$ ومن قاعدة اشتقاق الدالة العكسي نجد أن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{a^y}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

اي ان:

$$h'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

تطبيق :

إذا كان $h(x)=\log_{10}x$ فإن $h'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 10}$

3 • إذا كان $h(x)=\log_a . f(x)$ حيث $0<a\neq 1$ ،

فإن $h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{\ln a}$

البرهان :

نضع $y=f(x)$ و $g(y)=\log_a y$

فنجد أن : $(g_o f)(x) = g(f(x)) = \log_a . f(x) = h(x)$

ولذلك فإن : $h'(x) = (g o f)'(x)$

ومن قاعدة السلسلة نجد أن : $(g_o f)(x) = g'(f(x)) . f'(x)$

ومن النتيجة 2 السابقة نجد أن : $g'(y) = \frac{1}{y} . \frac{1}{\ln a}$

لذلك فإن : $g'(f(x)) = \frac{1}{f(x)} . \frac{1}{\ln a}$

إذن : $(g \circ f)'(x) = \frac{1}{f(x)} . \frac{1}{\ln a} . f'(x)$

أي أن : $h'(x) = \frac{1}{f(x)} . \frac{1}{\ln a} . f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} . \frac{1}{\ln a}$

تطبيق :

إذا كانت $h(x) = \log_3 (x^3 + x^2 - 1)$

فإن $h'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 1} . \frac{1}{\ln 3}$

3 - 9 اشتقاق الدوال الضمنية

لقد سبق أن عرفنا الدالة الضمنية بأنها دالة وضعت على شكل معادلة من النموذج $F(x,y) = 0$.

مثل : $xy + x - y + 2 = 0$ أو $x^2 + y^2 = c^2$ أو $y + x \ln y = 0$ إلى آخره ، وإن اشتقاق هذه الدوال في نقطة a معناه إيجاد y' في تلك النقطة a ، ولكننا لا نستطيع أن نعرف بصورة سهلة فيما إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق في a أم لا ؟ وتعتبر هذه المسألة من المسائل الصعبة في الرياضيات وتدرّس للمتخصصين وفي مستويات متقدمة . إنما سنعتبر جميع الدوال التي سنعرضها في هذا الموضوع هي دوال قابلة للاشتقاق ، ونوجد y' بأشتقاق المعادلة $F(x,y)= 0$ مطبقين جميع قواعد الاشتقاق التي مررنا عليها ، من جمع وضرب وقسمة و... ، ملاحظين أن $x'=\frac{dx}{dx}=1$ ثم بعد ذلك نوجد y' من المعادلة الناتجة .

أمثلة

1. أوجد مشتقة الدالة الضمنية المحددة بالمعادلة $xy^2 - x + 2y = 0$ في النقطة $(0, -2)$.

الحل :

نشتق المعادلة $xy^2 - x + 2y = 0$

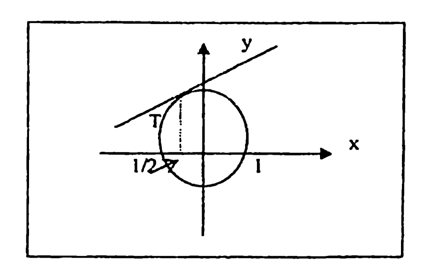
فنجد $x' . y^2 + 2xyy' - x' + 2 y' = 0$ ولكن $x' = 1$ ، ولذلك فإن :

$y^2 + 2x yy' - 1 + 2y' = 0$ ومنه $y' = \frac{1-y^2}{2xy+2}$

وفي النقطة $(0 , -2)$ تكون $y' = -\frac{3}{2}$

2. أوجد معادلة المماس للدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

الحل :



الشكل (5)

نشتق المعادلة $x^2 + y^2 = 1$ فنجد أن $2x + 2yy' = 0$ ومنه $y' = -\frac{x}{y}$ حيث $y \neq 0$

وفي النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ يكون $y' = \frac{1}{\sqrt{3}} = m$ وهذا هو ميل المماس المطلوب ، كما سبق أن بينا في شرح المفهوم الهندسي للمشتقة . بالتعويض في المعادلة العامة للمستقيم :

$y = mx + c$ نجد أن $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times (-\frac{1}{2}) + c$

ومنه $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، ومعادلة المماس المطلوب هي $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. إذا كانت $y=x^{\frac{p}{q}}$ حيث p و q أعداد صحيحة و $q\neq 0$ فأوجد y' .

الحل :

بما أن $y=x^{\frac{p}{q}}$ فإن $y^q=x^p$ نشتق ضمنياً هذه المعادلة مستفيدين من المثال في (2 - 1) لنجد أن $q\,y^{q-1}\,y' = p\,x^{p-1}$ ومنه :

$$y'=\frac{p}{q}x^{p-1}\,y^{1-q}=\frac{p}{q}x^{p-1}\,x^{\frac{p}{q}(1-q)}=\frac{p}{q}x^{p-1+\frac{p}{q}-p}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

3 - 10 المشتقات من مراتب عليا

تعريف 3 - 10 - 1

إذا كانت $y=f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة $I=(\alpha,\beta)$ فإن دالة المشتقة على هذه الفترة هو $y'=f'(x)$ كما رأينا . فإذا كانت هذه الدالة الجديدة قابلة للاشتقاق على الفترة I فإننا نرمز لدالة المشتقة بالرمز $y''=f''(x)$ ونسمي هذه الدالة بالدالة المشتقة من المرتبة الثانية للدالة $y=f(x)$. وهكذا ، فإننا نعرف $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ بأنه الدالة المشتق للدالة $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ أي أن :

$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$ أو $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}]'$ لكل $n\in N$

ونسمي الدالة $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ بالدالة المشتقة من المرتبة n للدالة $y=f(x)$ ونسمي الدوال $y'=f'(x)$ و $y''=f''(x)$ و ... و $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ و ... بالدوال المشتقة المتتابعة للدالة $y=f(x)$ ، وتكتب هذه المشتقات برموز ليبنز على الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} \text{ و } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ و ... و } \frac{d^ny}{dx^n} \text{ و .....}$$

- يجب أن نلاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مشتقات من مختلف المراتب (كما توضح الأمثلة التالية) ، كما يجب أن نلاحظ أن $f^{(0)}(x)=f(x)$. كذلك يجب أن نعلم أنه يمكن التحدث عن المشتقات المتتابعة للدوال الضمنية كما هو الحال بالنسبة للدوال الصريحة .

أمثلة

1. أوجد مشتقة الدالة الضمنية المحددة بالمعادلة $xy^2 - x + 2y = 0$

في النقطة $(0, -2)$.

الحل :

نشتق المعادلة $xy^2 - x + 2y = 0$

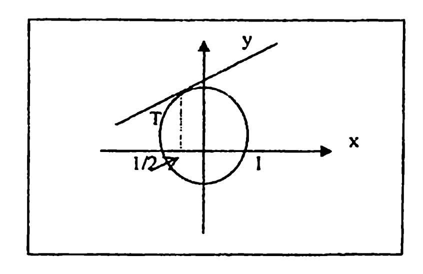
فنجد $x' . y^2 + 2xyy' - x' + 2 y' = 0$ ولكن $x' = 1$ ، ولذلك فإن :

$y^2 + 2x yy' - 1 + 2y' = 0$ ومنه $y' = \frac{1-y^2}{2xy + 2}$

وفي النقطة $(0 , -2)$ تكون $y' = -\frac{3}{2}$

2. أوجد معادلة المماس للدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

الحل :



الشكل (5)

نشتق المعادلة $x^2 + y^2 = 1$ فنجد أن $2x + 2yy' = 0$ ومنه $y' = -\frac{x}{y}$ حيث $y \neq 0$

وفي النقطة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ يكون $y' = \frac{1}{\sqrt{3}} = m$ وهذا هو ميل المماس المطلوب ، كما سبق

أن بينا في شرح المفهوم الهندسي للمشتقة . بالتعويض في المعادلة العامة للمستقيم :

$y = mx + c$ نجد أن $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} x (-\frac{1}{2}) + c$

أمثلة

1• إذا كانت $y = x^4 + 3x^3 + 3x + 2$ فأوجد $y^{(n)}$ لكل n من N .

الحل :

$$y' = 4x^3 + 9x^2 + 3$$
$$y'' = 12x^2 + 18x$$
$$y''' = 24x + 18$$
$$y^{(4)} = 24$$
$$y^{(5)} = 0$$

$$y^{(n)} = 0 \quad \forall \quad n \geq 5$$

2• إذا كانت $f(x) = x^{-1}$ فأوجد $f^{(n)}(x)$ لكل n من N .

الحل :

$f'(x) = (-1)\, x^{-2}$ و $f''(x) = (-1)^2\, 2.1\, x^{-3}$ و $f^{(3)} = (-1)^3.\, 3.2.1\, x^{-4}$

و $f^{(4)} = (-1)^4\, 4.3.2.1\, x^{-5}$

وهكذا نجد باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي أن : $f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}$

3• الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

تملك مشتقة من المرتبة الأولى في النقطة 0 ولكنه لا تملك مشتقة من المرتبة الثانية في هــذه النقطة ، حيث إن :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

ولكن $f'(x)$ غير مستمرة في النقطة 0 لأن :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 - \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} \neq f'(0) = 0$$

ولذلك فإن $f'(x)$ غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 بحسب أ من (2-2-3) .

إذن $f'(0)$ موجود ولكن $f''(0)$ غير موجودة .

3 - 11 المشتقات المتتابعة لحاصل ضرب دالتين (قانون ليبنز)

1 - 11 - 3 Leibniz مبرهنة ليبنز

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلين للاشـــتقاق حتـــى المرتبة n وكان $F(x) = f(x).\, g(x)$ فإن :

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}\, g' + \ldots + \binom{n}{i}f^{(n-i)}\, g^{(i)} + \ldots + \binom{n}{n}f\, g^{(n)}$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(n-i)}\, g^{(i)}$$

حيث أن $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ وان $m\,! = m.(m-1)\,.(m-2)\ldots 2\,.\,1$

وأن $0\,! = 1$

أمثلة

1. إذا كان $F(x) = x\,.\,e^{2x}$ فأوجد $F^{(n)}(x)$

الحل :

نضع $f(x) = x$, $g(x) = e^{2x}$ فنجد $F(x) = f(x)\,.\,g(x)$

لذلك نطبق مبرهنة ليبنز ، حيث لدينا :

$g(x) = e^{2x}$ | $f(x) = x$
$g'(x) = 2\,e^{2x}$ | $f'(x) = 1$
$g''(x) = 2^2\,e^{2x}$ | $f''(x) = 0$
$\vdots$ | $\vdots$
$g^{(n)}(x) = 2^n\,e^{2x}$ | $f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall\ n \geq 2$

ومنه

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}\,.\,g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\,.\,g' + \ldots + \binom{n}{n} f\,.\,g^{(n)}$$
$$= 0 + \binom{n}{n-1} f'\, g^{(n-1)} + \ldots + \binom{n}{n} f\,.\,g^{(n)}$$
$$= n\,.\,1\,.\,2^{n-1}\,.\,e^{2x} + 1\,.\,x\,.\,2^n\,.\,e^{2x}$$
$$= (n + 2x)\,.\,2^{n-1}\,.\,e^{2x}$$

2. إذا كان $F(x) = x^2\,.\ln x$ فأوجد $F^{(n)}(x)$.

الحل :

نضع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \ln x$ فنجد إن $F(x) = f(x) . g(x)$

لذلك نطبق قانون ليبنز ، حيث لدينا :

$f(x) = x^2$ | $g(x) = \ln x$

$f'(x) = 2x$ | $g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = 2$ | $g''(x) = (-1)\, x^{-2}$

$f'''(x) = 0$ | $g'''(x) = (-1)^2 . 2. 1. X^{-3}$

.

.

.

$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall\ n \geq 3$ | $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} . (n-1)! . x^{-n}$

(انظر المثال 2 من 13)

بالتعويض في قانون ليبنز نجد أنه من أجل $n \geq 3$ يكون :

$$F^{(n)}(n) = 0 + \binom{n}{n-2} f''.g^{(n-2)} + \binom{n}{n-1} f' g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f\, g^{(n)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}.2.(-1)^{n-3}(n-3)!x^{-(n-2)} + n.2x.(-1)^{(n-2)}(n-2)!x^{-(n-1)}$$

$$+1.\, x^2 (-1)^{n-1}.(n-1)!\, x^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1}.n(n-1)(n-3)!\, x^{-(n-2)} + (-1)^n\, 2n(n-2)!x^{-(n-2)}$$

$$+(-1)^{n-1}.(n-1)!\, x^{-(n-2)}$$

$$= (-1)^{n-1}.2(n-3)!\ x^{-(n-2)}$$

3. إذا كان $F(x) = x^5 \sin x$ فأوجد $F^{(4)}(x)$.

الحل :

نضع $f(x) = x^5$ و $g(x) = \sin x$ فنجد $F(x) = f(x). g(x)$ ولذلك نطبق قانون ليبنز :

$$F^{(4)}(x) = f^{(4)} g + \binom{4}{1} f^{(3)} g' + \binom{4}{2} f^{(2)} g^{(2)} + \binom{4}{3} f' g^{(3)} + \binom{4}{4} f\, g^{(4)}$$

حيث أن :

$f(x) = x^5$ | $g(x) = \sin x$

$f'(x) = 5x^4$ | $g'(x) = \cos x$

$f''(x) = 20x^3$ | $g''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = 60\,x^2 \qquad g^{(3)}(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = 120\,x \qquad g^{(4)}(x) = \sin x$

$\binom{4}{1} = 4 \quad , \binom{4}{2} = 6 \;,\; \binom{4}{3} = 4 \quad , \binom{4}{4} = 1$

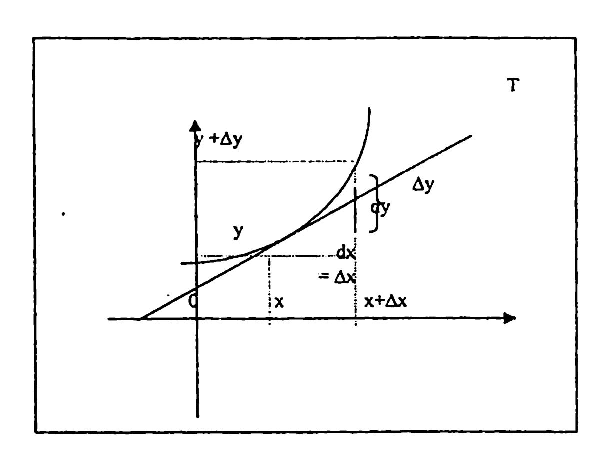
بالتعويض في قانون ليبنز نجد أن :

$$F^{(4)}(x) = 120\,x \sin x + 240\,x^2 \cos x - 120\,x^3 \sin x - 20\,x^4 \cos x + x^5 \sin x$$

12 - 3 الدالة وربطها بالمشتقة

رأينا أنه إذا كانت $y = f(x)$ دالة ما ، فإننا نرمز لمشتقتها برمز ليبنز الذي هو $\frac{dy}{dx}$ فمن أين جاء هذا الرمز ؟ بالحقيقة لدينا التعريف التالي :

إذا كانت x نقطة من مجال الدالة f وأضفنا إلى x تغيراً ما ، قدره Δx (زيادة أو نقصانا) بحيث تبقى النقطة $x + \Delta x$ في مجال الدالة f فعندئذ سيطرأ على y تغير قدره Δy حيث $\Delta y = f(x + \Delta) - f(x)$



الشكل (6)

نعرف تفاضلة y التي نرمز لها بالرمز dy كما يلي :

$$dy = y' . \Delta x$$

أو $df = f'(x) . \Delta x$ و إذا أخذنا $y = f(x) = x$ فإننا نجد أن :

$$dx = d\,f(x) = f'(x) .\ \Delta x = 1 . \Delta x = \Delta x$$

إذن $\Delta x = dx$

وبالتعويض في التعريف السابق نجد أن :

$$dy = f'(x)\, dx = y'\, dx$$

ومن هنا نرى أن $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

ويلاحظ مما تقدم ، ومن الشكل الهندسي السابق أن :

$$dy = \frac{dy}{dx} . dx = y' . \Delta x = f'(x) . \Delta x$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

dy تساوي تقريبا Δy أي $dy \cong \Delta y$

ولذلك فإن : $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \cong f(x) + dy$

ونظراً لسهولة حساب dy من العلاقة $dy = f'(x)\, dx = f'(x) . \Delta x$

فإننا نستفيد من العلاقة الأخيرة في إيجاد القيم التقريبية لبعض المسائل الحسابية .

أمثلة

1• إذا كانت $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ فأوجد dy و Δy عندما تتغير x من 2 إلى 2.1

الحل :

لدينا $\Delta y = f(2.1) - f(2) = [\, 3(2.1)^2 - 2(2.1) + 1] - [\, 3(2)^2 - 2(2) + 1]$

$$\Delta y = [3.(4.41) - 2(2.1) + 1\,] - [3(4) - 2.(2) + 1]$$

$$= 1.03$$

ثم إن $dy = f'(2) . \Delta x$

ولكن $f'(x) = 6x - 2$ ومنه $f'(2) = 12 - 2 = 10$

كما أن $\Delta x = 2.1 - 2 = 0.1$ ولذلك فإن $dy = 10 \times 0.1 = 1$

ويلاحظ أن : $dy = 1 \cong 1.03 = \Delta y$

2• استفد من مفهوم التفاضل لتحسب $\sqrt{102}$

الحل :

نضع $y = f(x) = \sqrt{x}$ ونأخذ $x = 100$ و $\Delta x = 2$ فنجد أن المطلوب هو :

$$f(x + \Delta x) = f(102) = \sqrt{102}$$

ولكننا رأينا أن : $f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy$

ومنه $\sqrt{102} \cong \sqrt{100} + dy$

ولكن $dy = f'(x) . \Delta x = f'(100) . \Delta x$

إنما $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ولذلك فإن $f'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$

إذن $dy = \frac{1}{20} . 2 = \frac{1}{10}$ وبالتالي فإن $\sqrt{102} \cong 10 + \frac{1}{10} = 10.1$.

3. استخدم التفاضل لتقدير قيمة التغير في $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ في الحالتين التاليتين :

a . عندما يزداد x من 32 إلى 34

b . عندما يتناقص x من 1 إلى 0.9

الحل :

a . لدينا $x = 32$ و $x + \Delta x = 34$ و $\Delta x = 2$. إن التغير في $f(x)$ هو :
$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ وبالاعتماد على التفاضل رأينا أن $\Delta f(x) \cong d f(x)$ حيث

$$df(x) = f'(x) . \Delta x$$

$$= \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} . \Delta x$$

$$= \frac{2}{5} \frac{1}{(32)^{\frac{3}{5}}} . 2 = \frac{4}{40} = 0.1$$

إذا $\Delta f(x) \cong 0.1$

أما القيمة الفعلية لـــ $\Delta f(x)$ فإنها :

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f(34) - f(32)$$

$$= (34)^{\frac{2}{5}} - (32)^{\frac{2}{5}} = 4.0982 - 4 = 0.0982$$

b. لدينا هنا $x = 1$ و $x + \Delta x = 0.9$ و $\Delta x = -0.1$ ومنه :

$$d f(x) = f'(x). \Delta x = \frac{2}{5} . \frac{1}{(1)^{\frac{3}{5}}} . (-0.1) = -\frac{2}{50} = -0.04 \cong \Delta f(x)$$

أما القيمة الفعلية لـــ $\Delta f(x)$ في هذا الحالة فإنها :

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f(0.9) - f(1)$$

$$= (0.9)^{2/5} - (1)^{2/5} = 0.9587 - 1 = -0.0413$$

تمارين

- في التمارين 1 إلى 5 ، استخدم تعريف المشتقة في نقطة، لتوجد – إن أمكن – مشتقة الدالة في النقطة المبينة إلى جانبه .

1. $f(x) = c$ حيث c ثابت ما في النقطة a
2. $f(x) = 2x^2 + 1$ في النقطة 4
3. $f(x) = \sqrt{x}$ في النقطة 1
4. $f(x) = x^n$ حيث $n \in N$ في النقطة 1
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ في النقطة 3

- في التمارين 6 إلى 10 ، أوجد – إن أمكن – $f'(a^+)$ و $f'(a^-)$ و $f'(a)$ للدوال f في النقط a المبينة إلى جانب كل منها .

6. $f(x) = |2x| + 1$ في النقطة $a = 0$
7. $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2}$ في النقطة $a = 0$
8. $f(x) = x - 2 + |x - 2|$ في النقطة $a = 2$
9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 1 \\ x^3 & ; x < 1 \end{cases}$ في النقطة $a = 1$
10. $f(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ x^2 + 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ في النقطة $a = 0$

- في التمارين 11 إلى 15 ، أوجد – إن أمكن – معادلة المماس والناظم لمنحنى الدالة f في النقطة المبينة إلى جانبه .

11. $f(x) = -x^2 + 1$ في النقطة (0,1)
12. $f(x) = 3|x| + 2$ في النقطة (0,2)
13. $f(x) = x^3 - 1$ في النقطة (0,-1)
14. $f(x) = \ln x'$ في النقطة (0,1)
15. $f(x) = \begin{cases} x^4 & ; x \geq 1 \\ 4x - 3 & ; x < 1 \end{cases}$ في النقطة (1,1)

• في التمارين 16إلى 20 ، استخدم تعريف الاشتقاق لتوجد $f'(a)$ في النقط a المبينة في كل تمرين .

16• $f(x) = x^2 - 3$ ؛ $a = -1$

17• $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ $a = -2$

18• $f(x) = |x|$ ؛ $a = \sqrt{2}$

19• $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ 4x - 4 & ; x \geq 1 \end{cases}$ ؛ $a = 1$

20• $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ؛ $a = 2$

• في التمارين 21 إلى 25 ، استخدم قواعد الاشتقاق لتوجد الدالة المشتقة للدوال المعطاة

21• $f(x) = 3$

22• $f(x) = x^3 - x$

23• $f(x) = \frac{1}{x^2}$

24• $f(x) = -5x^2 + x$

25• $f(x) = \frac{1}{x} - 1$

• في التمارين 26 إلى 30 ، استخدم تعريف الاشتقاق لتوجد $f'(a)$ في النقط a المبينة في كل تمرين .

26• $f(x) = (x - \frac{1}{x})(x^2 - \frac{1}{x^2})$ ؛ $a = 1$

27• $f(x) = x^3 + x^2\sqrt{x}$ ؛ $a = 2$

28• $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ؛ $a = 0$

29• $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 2}$ ؛ $a = 5$

30• $f(x) = x^n + \sqrt{x}$ ؛ $a = 1$

• في التمارين 31 إلى 35 ، استخدم قواعد الاشتقاق لايجاد الدوال المشتقة للدوال المعطاة .

31. $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

32. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^2$

33. $f(x)=\mathrm{Sin}\,x+x^3$

34. $f(x)=x^4+\frac{1}{x}$

35. $f(x)=x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}$

• في التمارين 36 إلى 40 ، أوجد قيمة a إذا علمت أن :

36. $f(x)=-x^2$ و $f'(a)=6$

37. $f(x)=x^2+3x$ و $f'(a)=13$

38. $f(x)=\frac{1}{x}$ و $f'(a)=-\frac{1}{9}$

39. $f(x)=2x-x^2$ و $f'(a)=0$

40. $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ و $f'(a)=0$

• في التمارين 40 إلى 45 ، أوجد $\frac{dy}{dx}$

41. $y=5x^2+1$

42. $y=1-\sqrt{x}$

43. $y=-\frac{1}{x^2}$

44. $y=\frac{2x+1}{x+2}$

45. $y=\frac{1}{\sqrt{x}-x}$

• في التمارين 46 إلى 50 ، أوجد معادلة المستقيم المماس لمنحنى الدالة f في النقط المعطاة في كل تمرين .

46. $f(x)=x^2$ ؛ $(-2,4)$

47. $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $(1,1)$

48. $f(x)=\frac{1}{x}$ ؛ $(1,1)$

49. $f(x) = 5$ ؛ $(0,5)$

50. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ؛ $(1,0)$

• في التمارين 51 إلى 55 ، استخدم قاعدة السلسلة لتثبت صحة المشتقة المعطاة لكل دالة :

51. إذا كانت $h(x) = \ln f(x)$ فإن $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

52. إذا كانت $h(x) = \sqrt{f(x)}$ فإن $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

53. إذا كانت $h(x) = \sin f(x)$ فإن $h'(x) = f'(x) \cos f(x)$

54. إذا كانت $h(x) = \cos f(x)$ فإن $h'(x) = - f(x) \sin f(x)$.

55. إذا كانت $h(x) = e^{f(x)}$ فإن $h'(x) = f'(x) . e^{f(x)}$

• في التمارين 56 إلى 60 ، استفد من التمارين 51 – 55 السابقة لتوجد الدالة المشتقة لكل دالة معطاة .

56. $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

57. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x - 1}$

58. $f(x) = e^{x^2 - x}$

59. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

60. $f(x) = \cos \frac{x+1}{x-1}$

• في التمارين 61 إلى 65 ، استخدم قاعدة السلسلة لتوجد الدالة المشتقة للدالة المعطاة .

61. $f(x) (x + 3x^2)^5$

62. $f(x) = (2x^2 + x)^{-5}$

63. $f(x) = x^x$

64. $f(x) = \sqrt{\sin x}$

65. $f(x) = \sin \sqrt{x}$

• في التمارين 66 – 70 ، استخدم مفهوم الاشتقاق الضمني لتوجد y' .

66. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1$

67. $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

68. $x^2 - y^2 = 1$

69. $\sqrt{y} = xy$

70. $x^2 + y^2 - 2xy = 4$

• في التمارين 71 – 75 أوجد $y^{(n)}$ من اجل n المحددة في كل تمرين .

71 • إذا كانت $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ فأوجد $y^{(3)}$

72 • إذا كانت $y = 3^x$ فأوجد $y^{(4)}$

73• إذا كانت $y = x^{-2}$ فأوجد $y^{(5)}$

74• إذا كانت $y = \sqrt{x}$ فأوجد $y^{(4)}$

75• إذا كانت $y = \ln(x+1)$ فأوجد y''

• في التمارين 76 إلى 80 ، استخدم قانون ليبنز لتوجد المشتقات من مراتب عليا للدوال المفروضة .

76 • إذا كانت $F(x) = x^{-1} e^x$ فأوجد $F^{(3)}(x)$

77 • إذا كانت $F(x) = \text{Sin}\, x \sqrt{x}$ فأوجد $F^{(4)}(x)$

78• إذا كانت $F(x) = .\text{Ln}\,\frac{1}{x}$ فأوجد $F''(x)$

79• إذا كانت $F(x) = x5 . (x^2+e^x)$ فأوجد $F^{(3)}(x)$

80• إذا كانت $F(x) = e^x . \ln x$ فأوجد $F''(x)$

• في التمارين 81 إلى 85 ، استخدم مفهوم اشتقاق معكوس الدالة لتوجد المطلوب .

81 • إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x + 1$ فأوجد $(f^{-1})'(0)$

82 • إذا كانت $f(x) = e^{x^2}$ فأوجد $(f^{-1})'(x)$

83 • إذا كانت $f(x) = \ln(x^2+1)$ فأوجد $(f^{-1})'(x)$

84 • إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ فأوجد $(f^{-1})'(1)$

85 • إذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ فأوجد $(f^{-1})'(4)$

• في التمارين 86 إلى 90 ، استخدم التفاضل لتقدير قيمة التغير في الدالة المعطاة .

86 • $f(x) = \sqrt{x}$ حيث x تزداد من 4 إلى 5

87 • $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ حيث x تنقص من 1 إلى 0.8

88• $f(x) = \log_{10} x$ حيث x تزداد من 100 إلى 102

89 • $f(x) = e^x$ حيث x تزداد من 2 إلى 3

90 • $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث x تنقص من 5 إلى 4.5

• في التمارين 91 إلى 95 ، استخدم التفاضل لتوجد قيم المقادير المعطاة.

91. $\sqrt{66}$ 92. $\log_{10} 103$

93. $\cos (32)^0$ 94. $\sin (44)^0$

95. $\sqrt[3]{30}$

• في التمارين 96 إلى 115 ، أجب على المطلوب في كل تمرين .

96 • إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{x}$ برهن على أن f مستمرة في النقطة $x = 0$ ولكنه غير قابلة للاشتقاق في هذه النقطة

97 • إذا كانت $f(x) = x-2 + |x-2|$ فأوجد – إن أمكن – $f'(2^+)$ و $f'(2^-)$ و $f'(2)$

98 • أوجد معادلة الخط المماس لمنحنى الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x < 0 \\ x^3 & ; x \geq 0 \end{cases}$$ في النقطة $x = 0$.

99 • إذا كانت $y = x^{-1}$ فأوجد $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

100 • إذا كانت $$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$ فأوجد – إن أمكـن – $f'(x)$

101 • أوجد $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2+x+1}\right)$

102 • إذا كانت f دالة يحقق $f(0) = 2$ و $f'(0) = 1$ فأوجد معادلة الخط المماس لمنحنى f في النقطة $(0, 2)$.

103 • لتكن $y = 8x - 23$ معادلة الخط المماس لمنحنى دالة f في النقطة $(5, 17)$ أوجد $f'(5)$.

104 • أوجد معادلة الخط المماس لمنحنى الدالة $xy^2 = 18$ في النقطة $(2, -3)$.

105 • إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a وكانت

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & ; x \neq a \\ f'(a) & ; x = a \end{cases}$$

برهن أن الدالة g مستمرة في النقطة a .

106 . إذا كانت $y = e^{\sin^{-1} x}$ حيث $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

فبرهن على أن $(1 - x^2)\, y'' - x\, y' - y = 0$

107 . ادرس استمرارية الدالة $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & ; x \neq 3 \\ 1 & ; x = 3 \end{cases}$

في النقطة $x = 3$ ، هل f قابل للاشتقاق في هذه النقطة ؟

108 . إذا علمت أن $f(t) = t^3 + 2t$ و $t(x) = x^2$ فأوجد $\frac{df}{dx}$ عند $x = -1$

109 . ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \leq 1 \\ ax + b & ; x > 1 \end{cases}$

أوجد a و b حتى يكون هذه الدالة قابلة للاشتقاق في النقطة $x = 1$

110 . ليكن $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$ ، باستخدام التفاضل أحسب قيمة تقريبية لتزايد الدالة f عندما تتغير x من 8 إلى 8.1 .

111 . باستخدام التفاضل أوجد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{8.1}$.

112 . باستخدام التفاضل أوجد قيمة تقريبية للعدد $e^{2.1}$ علما بأن $e^2 = 7.39$.

113 . إذا كانت $f(x) = x^3 + 3|x| + 2$ فهل هذه الدالة قابل للاشقاق على R ؟

114 . إذا كانت $f(x) = e^{-x} + 1$ أوجد $(f^{-1}(2))'$.

115 . إذا كانت $f(x) = e^{-x} \frac{1}{x}$ فاستخدم قانون ليبنز لتوجد $f^{(3)}(1)$.

الفصل الرابع

تطبيقات المشتقات

الفصل الرابع

تطبيقات المشتقات

أولاً : تطبيقات المشتقات في دراسة الدوال

يستفاد من الاشتقاق في دراسة مواضيع متعددة من الرياضيات وأهم هذه المواضيع تتعلق بدراسة تغيرات دالة في فترة ما من مجالها .

نذكر منها :

تزايد وتناقص دالة ، القيم القصوى لدالة ، التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى دالة ، حساب الحالات غير المحددة للنهايات .

وسنبين دور الاشتقاق في دراسة هذه المواضيع بعد التمهيد لذلك بمبرهنات فيرما و رول و لاغرانج .

4 - 1 مبرهنات فيرما و رول و لاغرانج

مبرهنة فيرما 4 - 1 - 1

إذا كانت f دالة معرفة على فترة $[\alpha , \beta]$ حيث $\alpha < \beta$ ويبلغ حده الأعلى (الأدنى) في هذه الفترة عند النقطة c من (α, β) وكان f قابلة للاشتقاق في c فإن $f'(c) = 0$.

البرهان :

ينتج من تعريف الحد الأعلى لدالة f على فترة $[\alpha, \beta]$ أن $f(x) \leq f(c)$ لكل x من $[\alpha, \beta]$ ومنه نجد :

- إذا كانت $x < c$ فإن $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ وبالتالي فإن :

$$f'(c^-) = \lim_{\substack{x \to c \\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

- إذا كانت $c < x$ فإن $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ وبالتالي فإن :

$$f'(c^+) = \lim_{\substack{x \to c \\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

وبما أن f قابلة للاشتقاق في c فإنه ينتج عند الملاحظة ب من (3 -2 - 2) أن :

$f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$

ولذلك فإن $f'(c) = 0$.

مبرهنة رول 4- 1 - 2

إذا كانت f دالة مستمرة على فترة $[\alpha, \beta]$ حيث $\alpha < \beta$ وقابلة للاشتقاق على (α, β) و $f(\alpha) = f(\beta)$ فإنه يوجد على الأقل نقطة $c \in (\alpha, \beta)$ بحيث يكون $f'(c) = 0$.

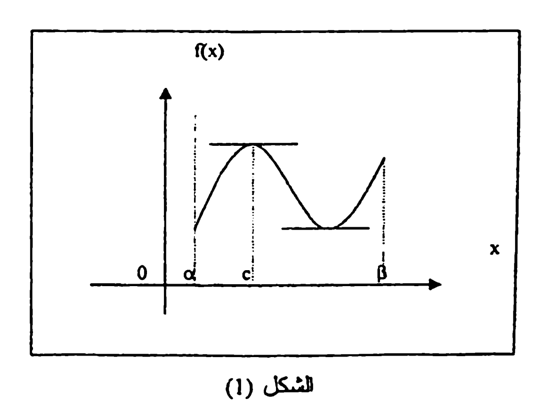
البرهان :

1 • إذا كانت f ثابتة على $[\alpha, \beta]$ فإن $f'(x) = 0$ لكل $x \in (\alpha, \beta)$ ، وهذا يعني إن كل نقطة من (α, β) تصلح لأن تكون c .

2 • إذا كانت f غير ثابتة وكان L و U الحدين الأدنى و الأعلى للدالة f على $[\alpha, \beta]$ فإن $L < U$ وبما أن $f(\alpha) = f(\beta)$ فإن $f(\alpha)$ سيختلف إما عن U أو عن L ولنفرض أن $f(\alpha) \neq U$ ولذلك يوجد $c \in (\alpha, \beta)$ بحيث يكون $f(c) = U$ ، وينتج عن مبرهنة فيرما أن $f'(c) = 0$.

ملاحظات 4 - 1 - 3

أ • المعنى الهندسي لمبرهنة رول هو إنه – عند تحقيق فروض المبرهنة – يوجد نقطة على منحنى الدالة f ، فاصلتها $c \in (\alpha, \beta)$ ، يكون المماس فيها موازياً للمحور ox.



الشكل (1)

ب • قد توجد نقطة $c \in (\alpha, \beta)$ بحيث تكون $f'(c) = 0$ دون أن تحقق الدالة f شروط مبرهنة رول على الفترة $[\alpha, \beta]$.

أمثلة

1• بين أن الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ تحقق شروط مبرهنة رول على الفتــرة $[0, 3]$ وأوجد النقط c الموافقة .

الحل :

بما أن f دالة كثيرة حدود فإنها مستمرة على $[0,3]$ وقابلة للاشــتقاق علــى $(0, 3)$ ولدينا $f(0) = 2 = f(3)$. إذن f تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[0, 3]$.

من أجل إيجاد النقاط c الموافقة ، نلاحظ أن : $f'(x) = 3x^2 - 6x$

وتكون $f'(x) = 0$ عندما تكون $x^2 - 2x = 0$ أي عندما تكون $x(x-2) = 0$ أي عندما يكــون إما $x = 0$ أو $x = 2$ ولكن $x = 0$ ليست من الفترة $(0, 3)$ ولذلك فإن النقطة الموافقة هي $c = 2$.

2• الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & ; x \neq 1 \\ 5 & ; x = 1 \end{cases}$$

لا تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-2, 2]$ لأنها غير مستمرة فــي النقطــة $x = 1$ حيث $\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \neq f(1)$.

ولكن يوجد $c = 0 \in (-2, 2)$ تحقق $f'(c) = 0$.

مبرهنة لاغرانج (التزايدات المحدودة) 4 - 1 - 4

إذا كانت f دالة مستمرة على فترة $[\alpha, \beta]$ حيث $\alpha < \beta$ ، وقابلة للاشتقاق على (α, β) فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل $c \in (\alpha, \beta)$ بحيث يكون :

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

البرهان :

نأخذ الدالة

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} x$$

فنجد إنها تحقق شروط نظرية رول على الفترة $[\alpha, \beta]$ فهي مستمرة علــى $[\alpha, \beta]$ وقابلــة للاشتقاق على (α, β) ولدينا

$$\varphi(\alpha) = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha} = \varphi(\beta)$$

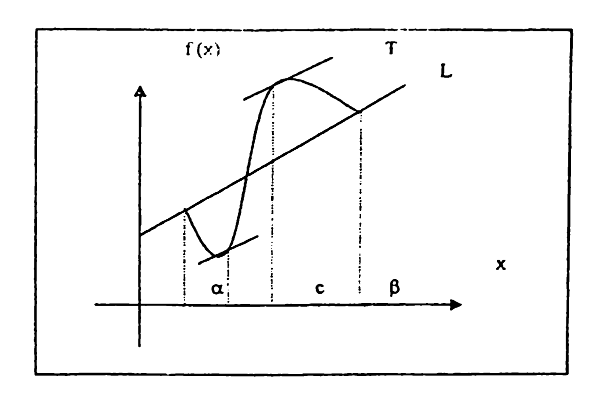
إذن يوجد c في الفترة (α, β) بحيث يكون $\varphi'(c) = 0$ ولكن :

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

إذن
$$f'(c) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ملاحظات 4 - 1 - 5

أ • المعنــى الهنــدسي لمبــرهنة لاغرانــج هو إنه عند تحقق فروض المبرهنــة يوجـد نقطة واحدة على الأقل من منحنى الدالة f فاصلتها $c \ni (\alpha, \beta)$ يكون المماس فيها موازياً للمستقيم L المار من النقطتين $(\alpha, f(\alpha))$ و $(\beta, f(\beta))$.



الشكل (2)

ب • يسمى القانون
$$f'(c) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

بقانون التزايدات المحدودة للدالة f على الفترة $[\alpha, \beta]$ ، ويكتب هذا القانون على الشكل:

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)\, f'(c)$$

وإذا وضعنا $\beta - \alpha = h$ و $\theta = \frac{c-\alpha}{\beta-\alpha}$ نجد أن :

$$\beta = \alpha + h \quad \text{و} \quad c = \alpha + \theta h \quad \text{حيث} \quad 0 < \theta < 1$$

ويكتب القانون السابق على الشكل :

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + h\, f'(\alpha + \theta h)$$

وإذا أخذنا x نقطة متغيرة في الفترة $[\alpha, \beta]$ نحصل على :

$$f(x + h) = f(x) + h\, f'(x + \theta h).$$

أو

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h) \quad ; 0<\theta<1$$

وهذه هي الصيغة المشهورة لقانون التزايدات المحدودة .

جـ • يمكن تعميم مبرهنة التزايدات المحدودة على الشكل التالي :

إذا كان f و g دالتين تحققان شروط مبرهنة التزايدات المحدودة على فترة $[\alpha, \beta]$ حيث $\alpha<\beta$ ، وكان $g(\beta) \neq g(\alpha)$ فإنه توجد نقطة – واحدة على الأقل – $c \in (\alpha, \beta)$ بحيث يكون : $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ ، ويبرهن هذا التعميم بأن نأخذ الدالة $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}g(x)$ ونطبق عليها مبرهنة رول فنجد المطلوب مباشرة .

• إذا أخذنا في هذا التعميم الدالة g بحيث أن $g(x)=x$ لكل x من $[\alpha, \beta]$ فإننا نعود إلى الحالة السابقة .

3 • برهن على أن الدالة $f(x)=x^2-5x+6$ تحقق شروط مبرهنة لاغرانج (التزايدات المحدودة) على الفترة $[1,6]$ ثم أوجد النقاط c الموافقة .

الحل :

بما أن الدالة f هي دالة كثيرة حدود فإنها مستمرة على الفترة $[1, 6]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(1, 6)$ ولذلك فإن f تحقق شروط مبرهنة لاغرانج على الفترة $[1, 6]$. ومن أجل إيجاد النقاط c الموافقة نحل المعادلة :

$f'(c)=\frac{f(6)-f(1)}{6-1}$ التي هي $2c-5=\frac{12-2}{5}=2$

وحل هذه المعادلة هو : $c=\frac{7}{2}$.

4 - 2 دور الاشتقاق في دراسة تزايد وتناقص دالة

تعريف 4 – 2 – 1

- نقول عن الدالة f إنها متزايدة على الفترة $I = (\alpha, \beta)$ من مجالها، إذا كانت تحقق الشرط التالي :

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ وذلك لكل x_1 و x_2 من I .

- نقول عن الدالة f إنها متناقصة على الفترة $I = (\alpha, \beta)$ من مجالها، إذا كانت تحقق الشرط التالي :

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$ وذلك لكل x_1 و x_2 من I .

- نقول عن الدالة f إنها وتيرية (مطردة) على الفترة $I = (\alpha, \beta)$ من مجالها، إذا كانت f متزايدة على I أو متناقصة على I .

- إذا استبدلنا الإشارة $\le$ بالإشارة $<$ في التعريف السابقة فإننا نتحدث عن الدالة المتزايد تماماً والمتناقص تماماً والوتيري تماماً .

أمثلة

1 . الدالة $f(x) = 2x - 1$ متزايدة تماماً على R لأنه لكل x_1 و x_2 من R فإن:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2 . الدالة $f(x) = e^{-x}$ متناقصة تماماً على R لأنه لكل x_1 و x_2 من R فإن:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_2 < -x_1 \Rightarrow e^{-x_2} < e^{-x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

3 . الدالة $f(x) = x^2$ متناقصة تماماً على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتزايدة تماماً على الفترة $(0, \infty)$ لأنه :

إذا كان x_1 و x_2 من $(-\infty, 0)$ فإن :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2^2 < x_1^2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

وإذا كان x_1 و x_2 من $(0, \infty)$ فإن :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

النتيجة التالية تستخلص مباشرة من التعريف السابق .

نتيجة 4 - 2 -2

إذا كانت $I = (\alpha, \beta)$ فترة من مجال الدالة f فإن :

- f متزايدة على الفترة I $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0 \Leftrightarrow$ لكل $x_1 \neq x_2$ من I .
- f متناقصة على الفترة I $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0$ لكل $x_1 \neq x_2$ من I .

مبرهنة 4 - 2 - 3

إذا كانت $y = f(x)$ دالة متصلة على فترة $I = [\alpha, \beta]$ حيث $\alpha < \beta$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $I = (\alpha, \beta)$ فإن :

1. f متزايدة على الفترة I $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ لكل x من I .
2. f متناقصة على الفترة I $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ لكل x من I .

البرهان :

نبرهن على 1 ويتم البرهان على 2 بطريقة مماثلة .

لنفرض أولاً أن الدالة f متزايدة على الفترة I ولتكن x نقطة من I وليكن $h \neq 0$ عدداً بحيث أن $x + h \in I$ عندئذ ينتج عن (4-2-2) أن $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ ولذلك فإن

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ أي أن $f'(x) \geq 0$.

العكس : لنفرض أن $f'(x) \geq 0$ لكل x من I عندئذ نجد إنه لكل x_1 و x_2 من $I = (\alpha, \beta)$ بحيث أن $x_1 < x_2$ يكون $[x_1, x_2] \subset I$ ، وبحسب نظرية التزايدات المحدودة ، يوجد c من $[x_1, x_2]$ بحيث يكون : $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

وبما أن $0 \leq f'(c)$ (بحسب الفرض) فإن $0 \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

وهذا يعني أن f متزايدة على I بحسب (4-2-2)

ملاحظة 4 - 2 - 4

ينتج عن المبرهنة السابقة إنه لإيجاد الفترات من مجال الدالة f التي تكون فيها f متزايدة (متناقصة) ندرس إشارة $f'(x)$ ونحدد الفترات التي يكون فيها $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) .

أمثلة

1 • أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$ متزايدة والفترات التي تكون فيها هذه الدالة متناقصة .

الحل :

إن $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$

وإن $f'(x) = 0$ في النقطتين $x = 0$ و $x = 2$ ولذلك فإن جدول إشارة $f'(x)$ هو :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
6x	-	+	+	
x-2	-	-	+	
f'(x)	+	-	+	

من هذا الجدول نجد أن $f'(x) > 0$ في الفترتين $(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$ ولذلك فإن الدالة f متزايدة في هاتين الفترتين وإن $f'(x) < 0$ في الفترة $(0, 2)$ ولذلك فإن الدالة f متناقصة في هذه الفترة .

2 • أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ متزايدة والفترات التي تكون فيها f متناقصة .

الحل :

نلاحظ أن $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x.x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

ومنه نجد أن $0 \leq f'(x) \Leftrightarrow 0 \leq x$

ولذلك فإن الدالة f تكون متزايدة على الفترة $[0, \infty)$ كما أن $0 \geq f'(x) \Leftrightarrow 0 \geq x$ ولذلك فإن f تكون متناقصة على الفترة $(-\infty, 0]$.

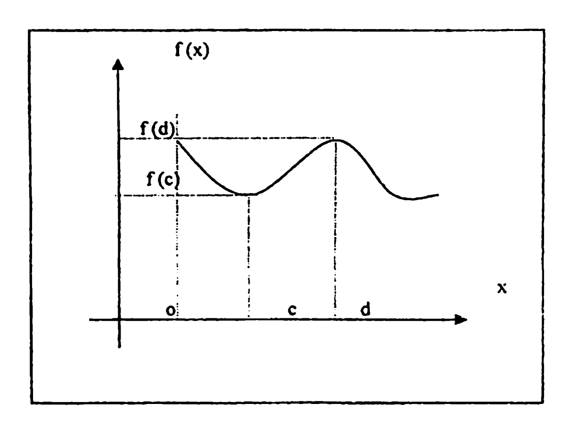
4 – 3 دورالاشتقاق في دراسة القيم القصوى للدوال

تعريف 4 - 3 - 1

نقول عن الدالة f إنها تملك قيمة عظمى في فترة I من مجالها ، إذا كان يوجد نقطة d من I بحيث يكون $f(x) \leq f(d)$ لكل x من I . ونسمي $f(d)$ ، في هذه الحالة بقيمة عظمى محلية للدالة f في الفترة I .

وبشكل مشابه ؛ فإننا نقول عن الدالة f إنه تملك قيمة صغرى في الفترة I من مجالها ، إذا كان يوجد نقطة c من I بحيث يكون $f(c) \leq f(x)$ لكل x من I . نسمي $f(c)$ ، في هذه الحالة ، بقيمة صغرى محلية للدالة f في الفترة I .

نسمي القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة f في I بقيمة قصوى للدالة f في I



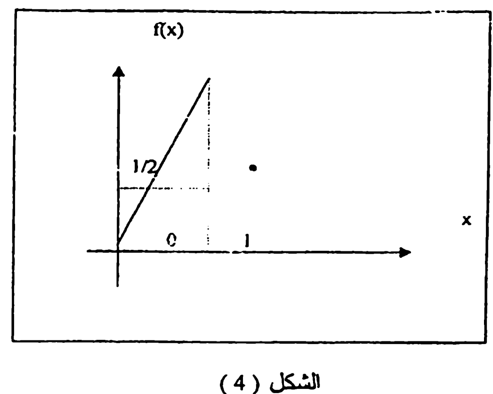
الشكل (3)

- إذا كانت I فترة من مجال الدالة f فإنه قد تكون للدالة f قيم قصوى محلية في الفتــرة I وقد لا تكون له قيم قصوى محلية في هذه الفترة ، كما توضح الأمثلة التالية :

أمثلة ـ

1. للدالة $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ قيمة صغــرى في الفترة $I = [-1, 1]$ عند النقطـــة 0 لأن $f(0) = 0 \leq f(x)$ لكل x من I وهي تملك قيمة عظمى عنـــد النقطتـــين -1 و $+1$ وهـــي $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$ لأن $f(x) \leq f(-1) = f(1)$ لكل x من I .

2 • للدالة $f(x)=\begin{cases}2x & ; x\neq 1\\ \frac{1}{2} & ; x=1\end{cases}$ قيمة صغرى في الفترة [0, 1] هي f (0) ولكــن ليس لها قيمة عظمى في هذه الفترة .

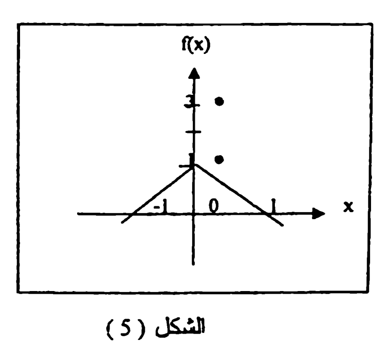


الشكل (4)

3• للدالة

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & ; x<0\\ 3 & ; x=0\\ -x+1 & ; x>0\end{cases}$$

قيمة عظمى في النقطة 0 من الفترة (-1, 1) ولكن ليس لها قيم صغرى كما يوضح الشــكل التالي :



الشكل (5)

مبرهنة 4 – 3 – 2

إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة ومحدودة $I = [\alpha, \beta]$ فـإن f تملـك قيمة صغرى وقيمة عظمى – واحدة على الأقل – في الفترة I .

مثال

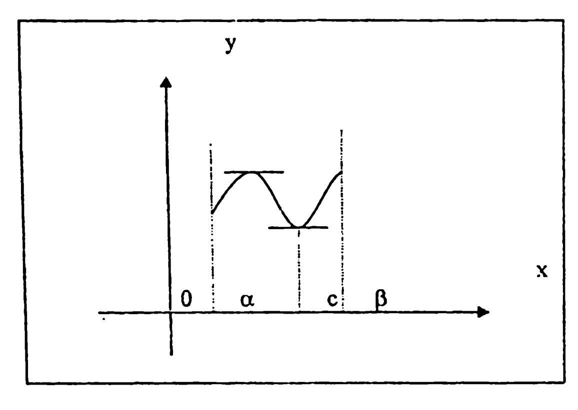
إن الدالة $f(x) = x - x^3$ مستمرة على الفترة $[-1, 1]$ ولذلك فإن للدالـة f قيم صغرى وقيم عظمى في الفترة $[-1, 1]$.

ملاحظات 4 – 3 – 3

أ • يمكن صياغة مبرهنة فيرما الواردة في (4-1-1) على الشكل التالي :

إذا كانت f دالة معرفة على فترة $[\alpha,\beta]$ حيث $\alpha < \beta$ وإذا كانـت للدالـة f قيمـة قصوى في النقطة c من الفترة المفتوحة (α , β) فإن $f'(c) = 0$

والمعنى الهندسي لهذه المبرهنة هو أنه في نقاط القيم القصوى التي تكون فيها مشتقة الدالـة موجودة ، يكون مماس منحنى الدالة أفقيا .



الشكل (6)

ب • إن عكس مبرهنة فيرما ليس صحيحاً بشكل عام ، فقد نجد c مـن الفتـرة (α , β) بحيث يكون $f'(c) = 0$ دون أن تكون للدالة f قيمة قصوى في c ، فمثلا يمكـن أن نرى إنه ليس للدالة $f(x) = x^3$ قيمة قصوى في النقطة 0 من $(-1, 1)$ مع أن $f'(0) = 0$

جـ • ينتج عن مبرهنة فيرما أنه إذا كان لدالة f قيم قصوى في الفترة (α, β) فإن هذه القيم القصوى ستكون في النقاط c من (α, β) التي يكون فيها إما $f'(c)$ موجودة وتساوي صفراً أو $f'(c)$ غير موجودة .

تعريف 4 - 3 - 4

إذا كانت $I = (\alpha, \beta)$ فترة من مجال دالة f فإننا نسمي النقطة c من I التي يكون فيها $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة ، **بنقاط حرجة** للدالة f في الفترة المفتوحة (α, β) .

وإذا كانت $I = [\alpha,\beta]$ فترة مغلقة من مجال f فإن α و β تسمى نقاط الأطراف للفترة I وهي أيضاً نقاط حرجة للدالة f في الفترة المغلقة $[\alpha,\beta]$.

مبرهنة 4 - 3 - 5

لتكن c نقطة حرجة للدالة f في الفترة $I = [\alpha,\beta]$ ولنفرض أن f مستمرة في c . إذا وجد عدد موجب δ بحيث أن $c - \delta , c+\delta \in I$ وبحيث أن :

1• $f'(x) > 0$ لكل x من $(c-\delta, c)$ و $f'(x) < 0$ لكل x من $(c, c+\delta)$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى للدالة f .

2• $f'(x) < 0$ لكل x من $(c-\delta, c)$ و $f'(x) > 0$ لكل x من $(c, c+\delta)$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى للدالة f .

3• إشارة $f'(x)$ واحدة في $(c, c+\delta) \cup (c-\delta, c)$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى للدالة f .

• تسمى القيم القصوى للدالة f المحددة في هذا الاختبار بالقيم القصوى المحلية (أو النسبية) للدالة f .

• يمكن صياغة هذا الاختبار بالشكل التالي :

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $I = [\alpha,\beta]$ وقابلة للاشتقاق في جوار

$V = (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ (حيث δ عدد موجب) للنقطة c محتوى في I فإنه :

1. إذا تغير $f'(x)$ إشارته من (+) إلى (-) عند c فإن للدالة f قيمة محلية عظمى عند c .

2. إذا تغير $f'(x)$ إشارته من (-) إلى (+) عند c فإن للدالة f قيمة محلية صغرى عند c .

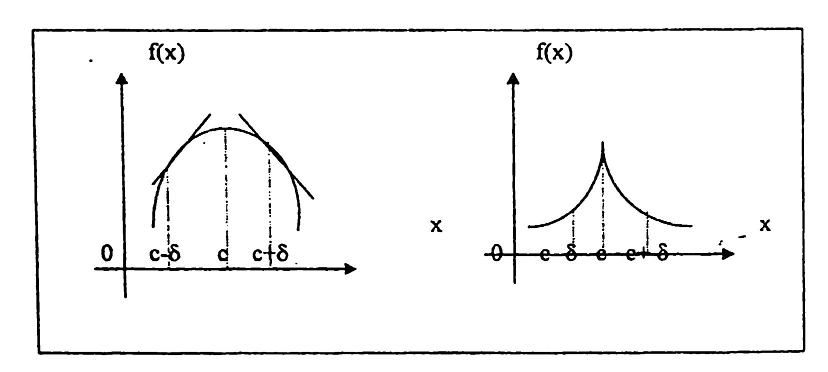
البرهان :

1. بالاعتماد على المبرهنة (4– 2– 3) نجد أنه إذا كانت x من الجوار V المحتوى في I فإن $f(x) < f(c)$ (كما في الجدول التالي) ، وهذا يعني أن $f(c)$ قيمة عظمى للدالة f في الجوار V

x	α		$c-\delta$		c		$c+\delta$		β
إشارة $f'(x)$				+		-			
$f(x)$				↗		↘			

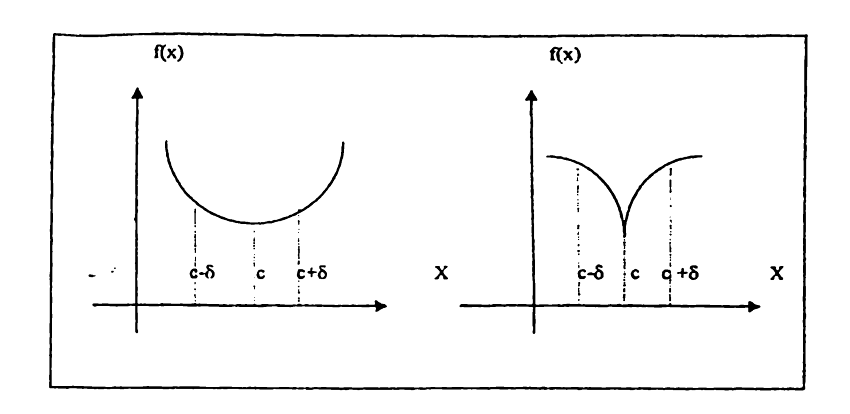
2. نفس برهان 1 .

- إن الأشكال التالية توضح الأوضاع المختلفة الواردة في المبرهنة السابقة .



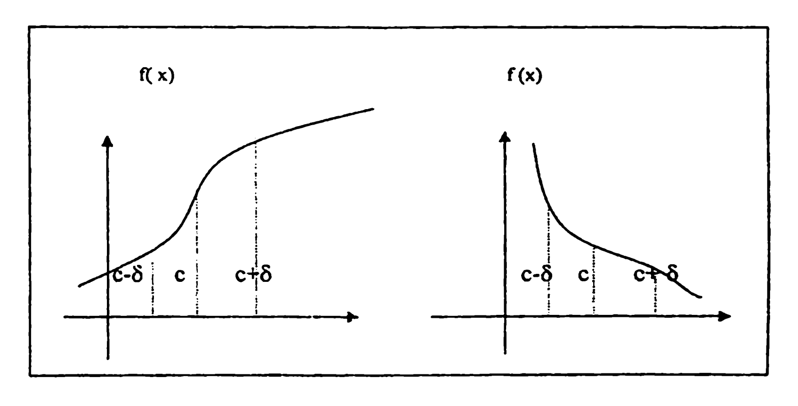
c نقطة حرجة حيث $f'(c)=0$ c نقطة حرجة حيث $f'(c)$ غير موجودة

الحالة الاولى   الشكل (7)



c نقطة حرجة حيث $f'(c)$ غير موجودة   c نقطة حرجة حيث $f'(c) = 0$

الشكل (8)   الحالة الثانية



الشكل (9)   الحالة الثالثة

- **الخطوات العملية في دراسة القيم القصوى المحلية لدالة f مستمرة على فترة (α,β) باستخدام المشتقة الأولى .**

1. نوجد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة (α,β) وهي النقاط c من (α,β) التي يكون فيها $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة .
2. ندرس إشارة $f'(x)$ في الفترة (α,β) .

3. إذا كانت c نقطة حرجة وكانت إشارة $f'(x)$ موجبة على يسار c مباشرة ، ثم أصبحت سالبة على يمين c مباشرة فإن $f(c)$ قيمة عظمى ، وإذا كانت إشارة $f'(x)$ سالبة قبل c (على يسار c) ثم أصبحت موجبة بعد c (على يمين c) فإن $f(c)$ قيمة صغرى ، وإذا كانت إشارة $f'(x)$ قبل c هي نفسها بعد c فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى للدالة f .

أمثلة

1. أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^4 - 2x^3$ على الفترة $(-\infty, \infty)$ وعين نوعها.

الحل :

إن $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ وإن النقاط الحرجة للدالة f هي النقاط من $(-\infty, \infty)$ التي تحقق $f'(c) = 0$ أي $4c^3 - 6c^2 = 0$

ومنه نجد أن $2c^2(2c-3) = 0$ فالنقاط الحرجة هي قيم c التي تحقق هذه المعادلة وهي $c_1 = 0$ و $c_2 = \frac{3}{2}$.

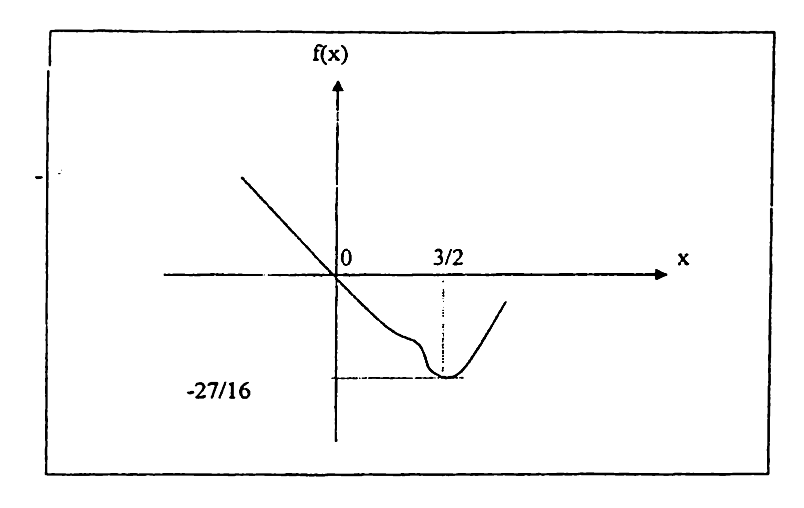
إن إشارة $f'(x)$ في الفترة $(-\infty, \infty)$ تحدد من الجدول التالي :

x	$-\infty$ 0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2$	+	+	+
$2x-3$	-	-	+
$f'(x)$	-	-	+

نلاحظ من هذا الجدول أن إشارة $f'(x)$ كانت سالبة قبل النقطة $c_1 = 0$ ثم بقيت سالبة بعدها ، لذلك فإنه لا يوجد للدالة f قيمة قصوى في النقطة الحرجة $c_1 = 0$ ، أما في النقطة الحرجة $c_2 = \frac{3}{2}$ فنلاحظ من الجدول أن إشارة $f'(x)$ كانت سالبة قبل النقطة

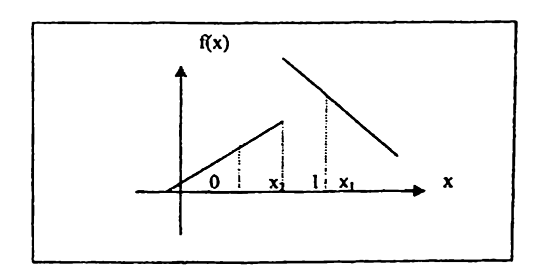
الحرجـــة $c_2 = \frac{3}{2}$ ثم أصبحت موجبة بعدها ، لذلك فإنه يوجد للدالة f قيمة صـــغرى

في $c_2 = \frac{3}{2}$ وهذه القيمة الصغرى هي $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$



الشكل (10)

2. للدالة $f(x) = \begin{cases} 1+2x & ; x \le 1 \\ 5-x & ; x > 1 \end{cases}$ نقطة حرجة في النقطـــة $c = 1$ لأن $f'(x)$ غير موجود ولكن ليس للدالة f قيمـــة قصوى في هذه النقطة على الرغم من أن إشارة $f'(x)$ كانت موجبة قبل $c = 1$ مباشرة ثم أصبحت سالبة بعد $c = 1$ مباشرة .



الشكل (11)

والسبب في هذه النتيجة هو أن هذه الدالة غير مستمرة في النقطة c .

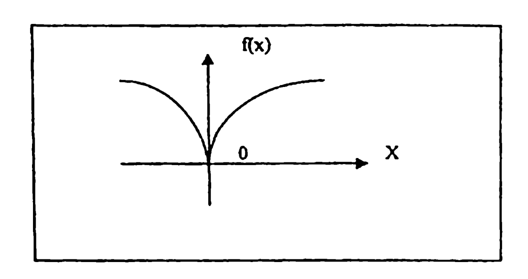
لا يوجد قيمة قصوى للدالة f هذه في النقطة c = 1 لأنه مهما كانت الفترة $I = (\alpha , \beta)$ التي ينتمي إليها 1 يوجد x_1 من I بحيث يكون $f(1) < f(x_1)$ ويوجد x_2 من I بحيث يكون $f(x_2) < f(1)$.

3. للدالة $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ نقطة حرجة في c = 0 لأن $f'(0)$ غير موجودة حيث لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{-\frac{1}{3}}$$

وهذه النهاية غير محدودة .

وبما أن $f(0) = 0 \leq f(x)$ مهما كانت x من الفترة $(-1,1)$ فإن للدالة f قيمة صغرى في النقطة c = 0 وهذه القيمة هي $f(0) = 0$.



الشكل (12)

ملاحظة 4 – 3 – 6

ينتج عن المبرهنة (4-3-5) مباشرة إنه إذا كان للدالة $f(x)$ قيمة عظمى في النقطة c من الفترة (α,β) فإنه يكون للدالة $-f(x)$ قيمة صغرى في c والعكس صحيح .

تعريف 4 - 3 – 7

نقول إن للدالة f قيمة عظمى (صغرى) مطلقة على الفترة $[\alpha,\beta]$ في النقطة c إذا كان $f(x) \le f(c)$ $(f(c) \le f(x))$ لكل x من $[\alpha,\beta]$ ،

ونوجد القيم القصوى المطلقة لدالة f على الفترة $I = [\alpha,\beta]$ باتباع الخطوات التالية :

1. نوجد النقاط الحرجة للدالة f على الفترة $[\alpha,\beta]$ ولتكن هذه النقاط :

$$\alpha \ , \ c_1 \ , c_2 \ , \ . \ . \ . \ , \ c_n \ , \beta$$

2. نحسب $f(\alpha), f(c_1) \ , f(c_2), \ldots, f(c_n), f(\beta)$

3. القيمة الكبرى التي نجدها في الخطوة 2 ، تكون قيمة عظمى مطلقة للدالة f على الفترة $[\alpha,\beta]$. والقيمة الصغرى التي نجدها في الخطوة 2 ، تكون قيمة صغرى مطلقة للدالة f على الفترة $[\alpha,\beta]$.

مثال

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ في الفترة $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

الحل :

نلاحظ أن :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 -2x+2 & ; \ 0 \le x \le \frac{3}{2} \\ x^2 +2x+2 & ; \ -\frac{1}{2} \le x < 0 \end{cases}$$

ومنه :

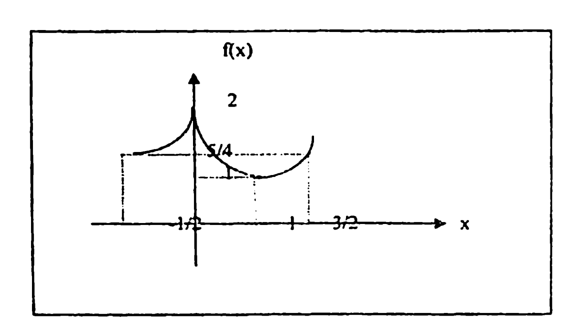
$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & ; \ 0 < x \le \frac{3}{2} \\ 2x+2 & ; \ -\frac{1}{2} \le x < 0 \end{cases}$$

فالنقاط الحرجة للدالة f على الفترة $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ هي :

$c_1 = 1$ لأن $f'(1) = 0$ و $c_2 = 0$ لأن $f'(0)$ غير موجودة بالإضافة إلى نقاط الأطراف وهي $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$ أما النقطة -1 التي يكون فيها $f'(-1) = 0$ فهي ليست من الفترة $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ ونلاحظ أن

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$

ولذلك فإن لهذه الدالة قيمة عظمى مطلقة في الفترة $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ تقع في النقطة 0 وهي $f(0) = 2$ وله قيمة صغرى مطلقة تقع في النقطة 1 وهـــي $f(1) = 1$ ، والشـــكل التـــالي يوضح هذه القيم .



الشكل (13)

مبرهنة 4 – 3 – 8

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة I من مجاله . وكانت c نقطة من I بحيـث أن $f'(c) = 0$ فإنه :

1 • إذا كانت $f''(x) \leq 0$ لكل x من I فإن $f(c)$ قيمة عظمى للدالة f في الفترة I.

2 • إذا كانت $f''(x) \geq 0$ لكل x من I فإن $f(c)$ قيمة صغرى للدالة f في الفترة I

البرهان :

نبرهن 1 ونترك 2 تمريناً لأنه يشابه 1.

بما أن $f''(x) \leq 0$ لكل x من I وبما أن f'' هو مشتقة f' فإنه ينتج عـن (3-2-4) أن f' متناقص على I وبما أن $f'(c) = 0$ فإنه لكل $x < c$ يكون $f'(x) \geq f'(c) = 0$ ولكـل $x > c$ يكون $f'(x) \leq f'(c) = 0$ وينتج عن (4-3-5) أن للدالة f قيمة عظمى في c .

ملاحظة 4 – 3 – 9

من دراسة النهايات والاشتقاق في نقطة ، يمكن أن نرى بسهولة إنه إذا كانت g دالة ما ، وكانت $g'(c)$ موجودة وموجبة فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث أنه إذا كان :

$c-\delta < x_1 < c < x_2 < c+\delta$ فإن $g(x_1) < g(c) < g(x_2)$

وإذا كانت $g'(x)$ موجودة وسالبة فإنه يوجد عدد موجب δ بحيث أنه إذا كان :

$c-\delta < x_1 < c < x_2 < c+\delta$ فإن $g(x_1) > g(c) > g(x_2)$

نتيجة 4 – 3 – 10

إذا كانت f دالة مستمرة على فترة I من مجالها ، وكانت c نقطة من I بحيث أن $f'(c) = 0$ وإذا فرضنا أن $f''(c)$ موجودة فإنه :

1 • إذا كانت $f''(c) > 0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f في الفترة I .

2 • إذا كانت $f''(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f في الفترة I .

3 • إذا كانت $f''(c) = 0$ فإننا لا نستطيع الحكم .

البرهان :

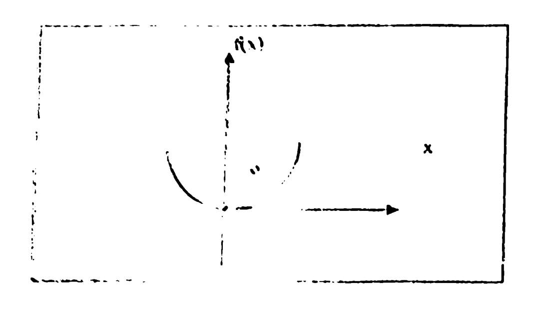
1 • بما إن $f''(c)$ موجودة وموجبة فإنه ينتج عن الملاحظة السابقة إنه يوجد عدد موجب δ بحيث أنه إذا كان :

$c-\delta < x_1 < c < x_2 < c+\delta$ فإن $f(c) < f'(x_1) < f'(x_2)$

أي إنه في الفترة $(c-\delta, c+\delta)$ المحتواة في I لدينا $f'(x) \leq 0$ لكل x من $(c-\delta, c)$ و $f'(x) \geq 0$ لكل x من $(c, c+\delta)$ و $f'(c) = 0$ ولذلك فإن $f(c)$ قيمة عظمى للدالة f بحسب (4 – 3-5) .

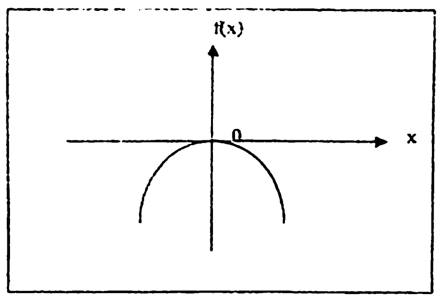
2 • نبرهن عليه بالأسلوب نفسه الذي برهنا به 1 .

3• عندما تكون $f''(c) = 0$ فإنه قد يكون للدالة f قيمة صغرى في c وقد يكون للدالة f قيمة عظمى في c وقد لا يكون للدالة f قيم قصوى في c كما توضح الأمثلة الثلاثة الواردة بالأشكال التالية :



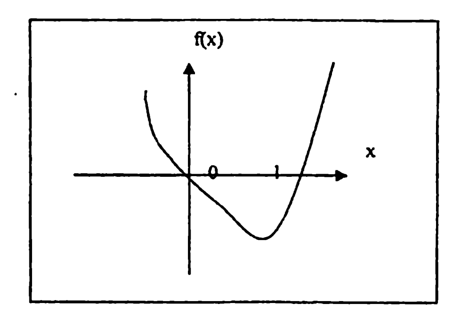
الشكل (14)

الدالة $f(x) = x^4$ تحقق $f'(0) = f''(0)$ ولها قيمة تظمى في النقطة 0



الشكل (15)

الدالة $f(x) = -x^4$ تحقق $f'(0)=f''(0)=0$ ولها قيمة عظمى في النقطة 0



الشكل (16)

الدالة $f(x) = 3x^4-4x^3$ تحقق $f'(0) = f''(0) = 0$ وليس لها قيمة قصوى في النقطة 0

أمثلة

1. استخدم اختبار المشتقة الثانية في ايجاد القيم العظمى والصغرى للدالة

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

الحل :

لدينا $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ و $f''(x) = 12x - 6$

ومنه $f'(x) = 0$ إذا كان $x^2 - x - 2 = 0$ أي إذا كان $x = 2$ أو $x = -1$ ومنه :

في النقطة $c_1 = 2$ لدينا $f'(c_1) = 0$ و $f''(c_1) = 18 > 0$ ولذلك فإن :

$f(c_1) = -15$ قيمة صغرى للدالة f . وفي النقطة $c_2 = -1$ لدينا $f'(c_2) = 0$

و $f''(c_2) = -18 < 0$ ولذلك فإن $f(c_2) = 12$ قيمة عظمى للدالة f .

2. استخدم اختبار المشتقة الثانية في ايجاد القيم الصغرى والقيم العظمى للدالة

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 4$

الحل :

بما أن هذه الدالة كثيرة حدود فإنها مستمرة وقابلة للاشتقاق على كل R ، لذلك فإن نقاطه الحرجة هي قيم x التي تحقق $f'(x) = 0$ ،ولكن $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

ويكون $f'(x) = 0$ عندما يكون $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ أي عندما يكون

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ ، ولذلك فإن النقاط الحرجة لهذه الدالة هي

$c_1 = 3 \quad , \quad c_2 = 2 \quad , \quad c_3 = 1$

إن المشتقة الثانية لهذه الدالة هي $f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

ونلاحظ أن :

$f''(c_1) = f''(1) = 8 > 0$ ولذلك فإن للدالة f قيمة صغرى في النقطة $c_1 = 1$ وهذه القيمة هي $f(1) = -5$.

$f''(c_2) = f''(2) = -4 < 0$ ولذلك فإن للدالة f قيمة عظمى في النقطة $c_2 = 2$ وهذه القيمة هي $f(2) = -4$.

$f''(c_3) = f''(3) = 8 > 0$ ولذلك فإن للدالة f قيمة صغرى في النقطة $c_3 = 3$ وهذه القيمة هي $f(3) = -5$.

4 - 4 دور الاشتقاق في دراسة التقعر والانعطاف

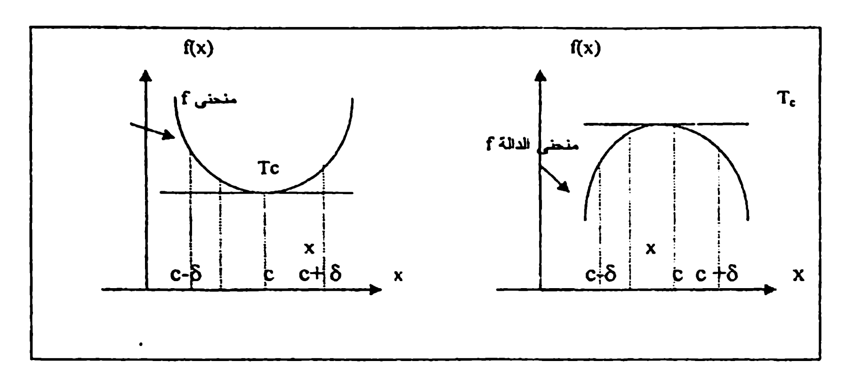
تعريف 4 - 4 - 1

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة c وكان T_c هو المستقيم المماس لمنحنى f في النقطة $(c, f(c))$

• نقول إن منحنى f محدب عند النقطة c (أو مقعر نحو الأسفل) إذا وجد جوار $I = (c-\delta, c+\delta)$ للنقطة c بحيث أن النقطة $(x, f(x))$ تقع تحت T_c لكل x من $I \setminus \{c\}$.

• نقول إن منحنى f مقعر عند النقطة c (أو مقعر نحو الأعلى) إذا وجد جوار $I = (c-\delta, c+\delta)$ للنقطة c بحيث أن النقطة $(x, f(x))$ تقع فوق T_c لكل x من $I \setminus \{c\}$.

ونوضح هذا التعريف بالشكلين التالين .



منحنى الدالة f مقعر عند النقطة c — منحنى الدالة f محدب عند النقطة c

الشكل (17)

• نقول إن منحنى f محدب (مقعر) في فترة مفتوحة I إذا كان منحنى f محدباً (مقعراً) عند كل نقطة من نقاط I .

• إن المبرهنة التالية تعطي اختباراً لتحدب وتقعر منحنيات الدوال وسنقبلها بدون برهان تاركين لطلاب التخصص البرهان عليها .

مبرهنة 4 – 2

لنفرض أن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة $I = (\alpha,\beta)$.

1. إذا كانت $0 < f''(x)$ لكل x من I فإن منحنى الدالة f مقعر في الفترة I .
2. إذا كانت $0 > f''(x)$ لكل x من I فإن منحنى الدالة f محدب في الفترة I .
3. إذا كانت $f''(x) = 0$ لكل x من I فإن منحنى الدالة f هو خط مستقيم في الفترة I

أمثلة

1. بين جهة تقعر منحنى الدالة $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

الحل :

بما أن هذه الدالة كثيرة حدود فإنها مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين على R ولإيجاد جهة التقعر ندرس إشارة $f''(x)$ حيث لدينا :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

ونلاحظ أن $f''(x) = 0$ عندما $x = 0$ أو $x = 2$

والجدول التالي يبين إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
12x	-	0	+		+	
x-2	-		-	0	+	
f''(x)	+		-		+	

نرى من هذا الجدول أن : $0 < f''(x)$ في الفترة $(-\infty, 0)$ ولذلك فإن منحنى f مقعر نحو الأعلى في هذه الفترة .

$0 > f''(x)$ في الفترة $(0,2)$ ولذلك فإن منحنى f محدب في هذه الفترة .

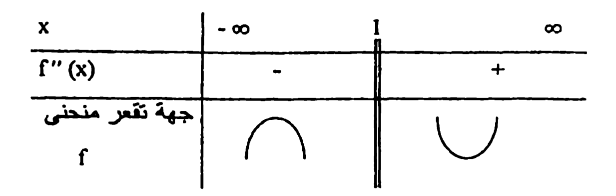
$0 < f''(x)$ في $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$ ولذلك فإن منحنى f مقعر نحو الأعلى في هذه الفترة

2. ليكن $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ أوجد الفترات من مجال f التي يكون فيها منحنى f محدباً وتلك التي يكون فيها منحنى f مقعراً .

الحل :

واضح أن الدالة معرفة ومستمرة على $R \setminus \{1\}$ ثم إن $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$.

وإن $f''(x) = \frac{10}{(x-1)^3}$ ونتعرف على إشارة $f''(x)$ من الجدول التالي :



x	$-\infty$	1	∞
$f''(x)$	$-$		$+$
جهة تقعر منحنى f	$\cap$		$\cup$

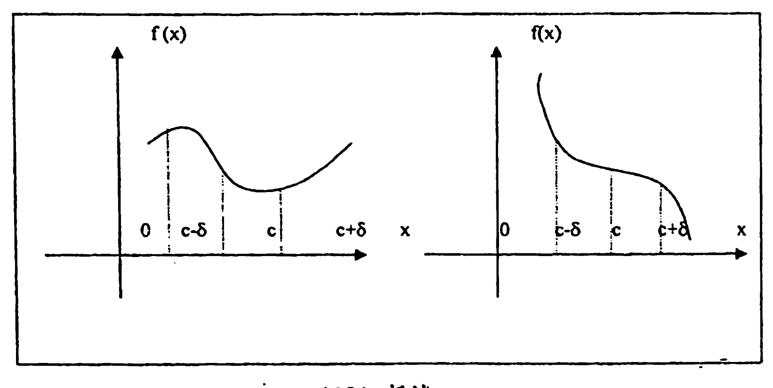
من الجدول نجد إنه :

في الفترة $(-\infty, 1)$ يكون $0 > f''(x)$ ومنحنى f محدباً .

في الفترة $(1, \infty)$ يكون $0 < f''(x)$ ومنحنى f مقعراً .

تعريف 4 – 4 – 3

إذا كانت f دالة مستمرة في النقطة c فإننا نسمي النقطة $(c, f(c))$ **نقطة انعطاف** لمنحنى f إذا كان يوجد $0 < \delta$ بحيث تكون جهة تقعر منحنى f في الفتـــرة $(c-\delta, c)$ مخالفة لجهة تقعر منحنى f في الفترة $(c, c+\delta)$ أي أن جهة التقعر على يسار c تخالف جهة التقعر على يمينها .

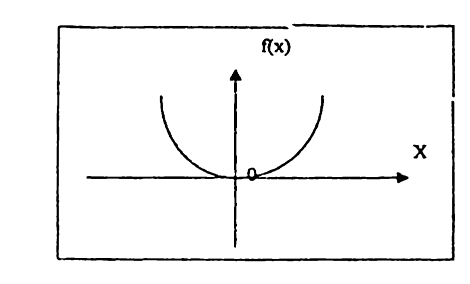


الشكل (18)

ملاحظات 4 – 4 – 4

أ . إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين في الفترة $I = (\alpha, \beta)$ وكانت c من I بحيث أن $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى f فإن $0 = f''(c)$.

ولكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً كما يوضح المثال $f(x) = x^4$ حيث لدينا f مستمرة في الفترة $I = (-1, 1)$ و $f''(0) = 0$ ولكن $c = 0$ ليست نقطة انعطاف لمنحنى f الذي له الشكل الآتي .



الشكل (19)

ب• لإيجاد نقاط انعطاف منحنى للدالة f ندرس إشارة $f''(x)$ ، فالنقاط التي يغير عندها $f''(x)$ إشارته هي نقاط انعطاف للدالة f .

أمثلة

1• أوجد نقاط الانعطاف للدالة : $f(x) = x^3 + 2$.

الحل :

إن هذه الدالة معرفة ومستمرة على R لأنها كثيرة حدود ولدينا :

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

إشارة $f''(x)$ يبينها الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
جهة تقعر f	∩		∪

ونرى من هذا الجدول أن $f''(x)$ تغير إشارته عند النقطة $c = 0$ ولذلك فإن هذه النقطة هي نقطة انعطاف لمنحنى f .

2. إذا كان $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

فإن $f''(x)$ تغير إشارته عند النقطتين $c_1 = 0$ و $c_2 = 2$ لذلك فإن هاتين النقطتين هما نقطتا انعطاف لمنحنى هذه الدالة .

5 - 4 دور الاشتقاق في حساب النهايات غير المحددة

رأينا في مبحث النهايات (الفصل الثاني 2-3-6) إنه توجد بعض النهايات عند التعويض المباشر نأخذ صيغاً غير محدد من الشكل $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ او... ، ويستفاد من الاشتقاق في حساب هذه النهايات من خلال قاعدة لوبيتال التالية :

مبرهنة لوبيتال (L'HÔpital) 1- 5 – 4 .

إذا كانت f و g دالتين قابليتين للاشتقاق في جوار (α,β) للنقطة c (يمكن أن لا تكونا قابليتين للاشتقاق في c نفسها) . وإذا كان $g'(x) \neq 0$ لكل x من (α,β) ، وإذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = 0 = \lim_{x\to c} g(x)$ ، وإذا كان $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ حيث L عدد محدود أو $+\infty$ أو $-\infty$ فإن

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

مثال

احسب النهاية التالية : $\lim_{x\to 0} = \frac{e^x - 1}{x}$

الحل :

نلاحظ أنه عند التعويض في هذه النهاية تنتج صيغة غير محددة من الشكل $\frac{0}{0}$

ولكن إذا وضعنا

$f(x) = e^x - 1$ و $g(x) = x$ فإننا نجد ان الدالتين f و g تحققان شروط مبرهنة لوبيتال ولذلك فإن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

2 – 5 – 4 ملاحظات

أ • لقاعدة لوبيتال صيغة ثانية نصها هو التالي :

إذا كانت f و g دالتين قابلين للاشتقاق على الفترة (α,∞) وإذا كان $g'(x) \neq 0$ لكل $\alpha < x$ ، وإذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$

وإذا كان $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ حيث L عدد محدود أو $+\infty$ أو $-\infty$

فإن $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

* ويمكن إعادة هذه الصيغة على الفترة $(-\infty,\beta)$ حيث $x \to \infty$

ب • يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال مرات عديدة متتابعة وذلك عند تحقق شروطها في كل مرة فنجد أن :

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots$$

جـ • يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال في النهايات الجانبية (اليمين أو اليسار) وذلك عند تحقق شروطها .

د • يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال في حال وقوعنا على غاية غير محددة من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ وذلك

إذا تحققت الشروط :

- f و g قابلتين للاشتقاق في جوار (α,β) للنقطة c
- $g'(x) \neq 0$ لكل x من (α,β)
- $\lim_{x\to c} f(x) = \infty = \lim_{x\to c} g(x)$

حيث يكون لدينا في هذه الحالة أيضا :

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

هـ • في كثير من الأحيان يمكن تحويل الحالات غير المحددة من الشكل :

$0 . \infty$ أو $\infty - \infty$ أو 0^0 أو 1^∞ أو ∞^0

– وذلك بعمليات جبرية – إلى الأشكال $\frac{0}{0}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ واستخدام قاعدة لوبيتال في حساب تلك النهايات .

أمثلة

1. احسب الغاية $\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x}$

الحل :

بما ان $\lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$ فـإن التعـويض المباشـر فـي

$\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x}$ يؤدي إلى الصيغة $\frac{0}{0}$

فإذا وضعنا $f(x) = 1 - e^{1/x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ وطبقنا قاعدة لوبيتال نجد أن :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1$$

2. احسب الغاية $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3}$

الحل :

بتطبيـق قواعـد الاشـتقاق نجـد أن التعـويض المباشـر فـي الغايـة:

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3}$ يؤدي الى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ولذلك نستخدم قاعـدة لوبيتال فنجد أن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^2}$$

ولكن الغاية $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^2}$ تؤدي أيضا إلى الصيغة $\frac{0}{0}$ ولذلك نطبق قاعدة لوبيتـال مرة ثانية فنجد أن :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x}$$

ولكن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}$ تؤدي ايضاً إلى الصيغة $\frac{0}{0}$ ولذلك نطبق قاعدة لوبيتال مرة ثالثة فنجد أن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}$$

3• أحسب الغاية $\lim_{x\to 0^+}=\frac{\ln x}{1/x}$.

الحل :

التعويض المباشر يؤدي الى الصيغة غير المحددة $\frac{-\infty}{\infty}$ ولذلك نطبق قاعدة لوبيتال فنجد

$$\lim_{x\to 0^+}=\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

4• احسب الغاية $\lim_{x\to 0^+}x.\ln x$

الحل :

للتعويض المباشر يؤدي الى الصيغة غير المحددة من الشكل $\infty-..0$ ولكن يمكن تحويل هذه الحالة غير المحددة إلى حالة من الشكل $\frac{-\infty}{\infty}$ كما يلي :

$$\lim_{x\to 0^+}x.\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=$$

والتي تؤدي عند التعويض المباشر إلى الصيغة $\frac{-\infty}{\infty}$ وقد حسبنا هذه الغاية الأخيرة في المثال السابق بالاعتماد على قاعدة لوبيتال فوجدناها تساوي 0 .

5• احسب الغاية $\lim_{x\to +\infty}[x-\ln x]$

الحل :

نلاحظ أن هذه الغاية تؤدي إلى حالة غير محددة من الشكل $\infty-\infty$ ولكن نلاحظ أيضاً أن:

$$x-\ln x = x.\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]$$

ومن قاعدة لوبيتال نجد أن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0$$

ولذلك فإن :

$$\lim_{x\to+\infty}[x-\ln x] = \lim_{x\to\infty} x.\left[1-\frac{\ln x}{x}\right] = +\infty.[1-0] = +\infty$$

6 • احسب النهاية $\lim_{x\to 0} x^x$

الحل :

تؤدي هذه النهاية عند التعويض المباشر الى الصيغة 0^0 ، ومن اجل حساب هذه النهاية نضع $y = x^x$ فنجد أن $\ln y = x \ln x$ ومنه نجد ، معتمدين على المثال 4 السابق ، أن

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$$

ولذلك فإن

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

7• احسب النهاية $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

الحل :

نلاحظ أن هذه النهاية تؤدي الى الشكل 1^∞ ومن أجل حساب هذه النهاية نضع $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ فنجد أن :

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

وهذه تؤدي إلى الصيغة $\frac{0}{0}$ وبتطبيق قاعدة لوبيتال نحصل على :

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

ومنه $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^1 = e$ أي أن $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

8. احسب النهاية $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

الحل :

نلاحظ أن هذه النهاية تؤدي إلى الصيغة ∞^0 لذلك نضع $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ فنجد أن :

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} . \ln(1+x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

تؤدي إلى الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ وبتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن $\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$

ومنه نجد $\lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$ أي أن $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

6 - 4 رسم منحنيات الدوال

الخطوات المتبعة في رسم المنحنيات 4 – 6 – 1

إذا طلب منا رسم المنحنى C للدالة $y = f(x)$ فإننا نتبع الخطوات التالية :

1. نحدد مجال للدالة f ونوجد الفترات التي تكون فيها f متصلة .
2. نوجد نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية :

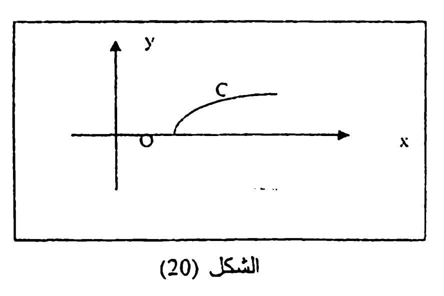
مع ox : نجعل $y = 0$ ثم نحل المعادلة $f(x) = 0$ لنوجد منها قيم x الموافقة .

مع oy : نجعل $x = 0$ في المعادلة $y = f(x)$ ثم نحل المعادلة الناتجة لنوجد قيم y الموافقة .

3. نبحث في تماثل C بالنسبة للمحاور الإحداثية ولنقطة الأصل 0 وذلك للاستفادة من خصائص التماثل في اختزال مجال الدراسة :

التماثل بالنسبة للمحور ox :

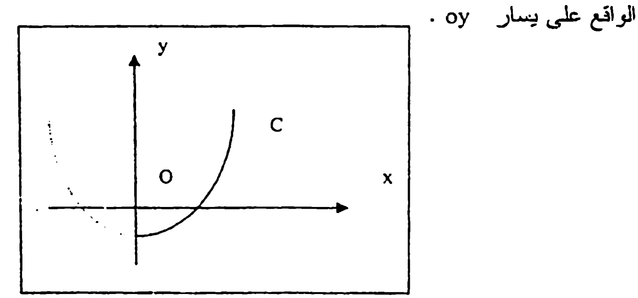
إذا كان $f(x) = -f(x)$ لكل x من مجال f فإن منحنى C يكون متماثلا بالنسبة للمحور ox ، أي أن شكله فوق المحور ox يماثل شكله تحت المحور ox ولذلك يمكن رسم جزء C الواقع فوق ox (من خلال الدراسة) ثم نستفيد من التماثل في رسم جزء C الواقع تحت ox .



الشكل (20)

التماثل بالنسبة للمحور oy :

إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x من مجال f فإن المنحنى C يكون متماثلا بالنسبة للمحور oy أي أن شكله على يمين المحور oy يماثل شكله على يسار المحور oy ولذلك يمكن رسم جزء C الواقع على يمين oy ثم نستفيد من التماثل في رسم جزء C الواقع على يسار oy .



الشكل (21)

التماثل بالنسبة لنقطة الأصل o :

إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x من مجال f فإن المنحنى C يكون متماثلا بالنسبة لنقطة مبدأ الإحداثيات 0 ويكون شكله في الربع الأول (الثاني) من مستوى الإحداثيات مماثلا لشكله في الربع الثالث (الرابع) على الترتيب من هذا المستوي .

ولذلك يمكن رسم جزء C الواقع في الربع الأول (الثاني) من مستوى الإحداثيات والاستفادة من التماثل في رسم جزء C الواقع في الربع الثالث (الرابع) .

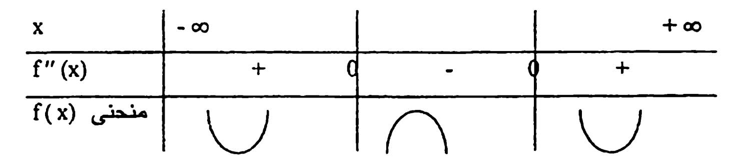
4. نبحث عن المستقيمات والمناحي المقاربة (كما ورد في ثالثا) .

5. نوجد النقاط الحرجة للدالة f وهي النقاط التي تحقق المعادلة $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير موجودة وذلك من اجل إيجاد القيم القصوى المحلية ثم ندرس إشارة $f'(x)$ لتحديد الفترات التي تكون فيها $f(x)$ متزايدة ($0 < f'(x)$) والفترات التي يكون فيها $f(x)$ متناقصة ($f'(x) < 0$) وننظم بذلك جدولا نبين فيه النقاط الحرجة وفترات تزايد وتناقص $f(x)$ كالجدول التالي :

x	$-\infty$		نقطة حرجة		نقطة حرجة		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	#	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

6. نوجد الفترات التي يكون فيها C مقعراً ($f''(x) > 0$) والفترات التي يكون فيهـا C محـدباً ($f''(x) < 0$) ونوجد نقاط الانعطاف وهي النقاط التي يكون فيها $f''(x) = 0$ و $f''(x)$ يغير إشارته عندها .

وننظم بذلك جدولا نبين فيه إشارة $f''(x)$ كالجدول التالي :



x	$-\infty$						$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
منحنى $f(x)$							

7. نرسم C مستفيدين من جميع الخطوات السابقة .

أمثلة

1. ارسم منحنى الدالة $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

الحل :

- إن مجال هذه الدالة هو R وهي مستمرة على R لأنها دالة كثيرة الحدود .
- التقاطع مع المحاور :

مع ox : نجعل $f(x) = y = 0$ فنجد أن $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0$

أي أن $(x-1)^2(-x+4) = 0$ ومنه $x = 1$ أو $x = 4$

ونقاط التقاطع هي : $(1,0)$, $(4,0)$

مع oy : نجعل $x = 0$ فنجد ان $y = 4$ ونقاط التقاطع هي : $(0,4)$

• التماثل : نلاحظ أن $f(-x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \neq f(x)$ فهي غير متماثل بالنسبة لـ oy ، كذلك فإن $f(x) \neq -f(x)$ فهي غير متماثل بالنسبة لـ ox وبالتالي فهي غير متماثل بالنسبة لنقطة الأصل o .

• التقعر والانعطاف :

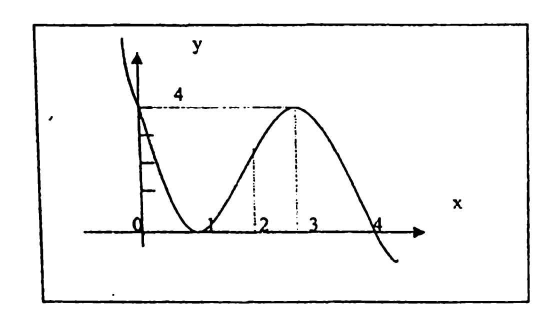
$$f''(x) = -6x + 12$$

ويكون $f''(x) = 0$ عند $x = 2$.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f''(x)$	+ 0 -
تقعر منحنى $f(x)$	∪ ∩

ونلاحظ من هذا الجدول ان منحنى هذه الدالة يمر بنقطة انعطاف عند $x = 2$ لأن $f''(x)$ يغير إشارته عندها وهذه النقطة هي $(2, 2)$

• الرسم



الشكل (22)

2• ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

الحل :

• إن مجال هذه الدالة هي $R\backslash\{-1\}$ وهي مستمرة في جميع نقاط مجالها لأنها دالة كسرية بسطها ومقامها كثيرة حدود .

• التقاطع مع المحاور :

مع ox : نجعل $y = 0$ فنجد أن $\frac{x-1}{x+1} = 0$ ومنه $x = 1$

ونقاط التقاطع هي : $(1,0)$

مع oy : نجعل $x = 0$ فنجد ان $y = -1$ ونقاط التقاطع هي : $(0,-1)$

- التماثل :

غير متماثل بالنسبة للمحور ox لأن $f(x) \neq -f(x)$

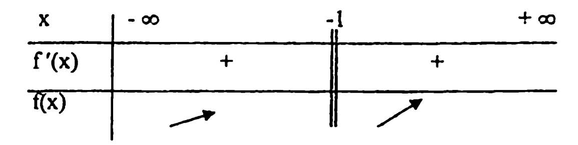
غير متماثل بالنسبة للمحور oy لأن $f(-x) \neq f(x)$

غير متماثل بالنسبة لنقطة الأصل لأن $f(-x) \neq -f(x)$

- النقاط الحرجة وإشارة $f'(x)$ والقيم القصوى :

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall \ x$$

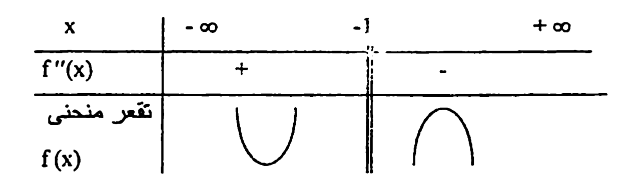
لا يوجد نقاط حرجة للدالة $f(x)$ ولذلك فليس له قيم قصوى .



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	↗	‖	↗

- التقعر والانعطاف :

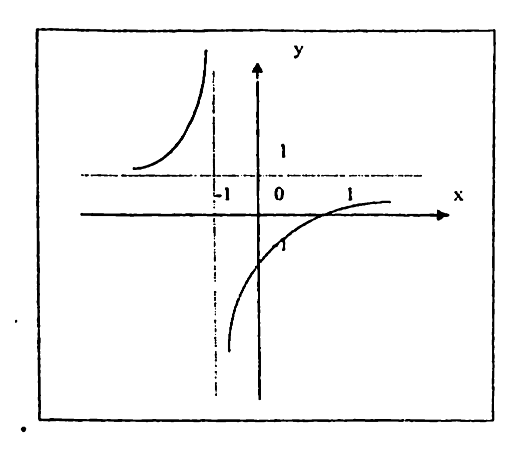
$$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}$$



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	+	‖	-
تقعر منحنى $f(x)$	∪	‖	∩

ليس للمنحنى نقاط انعطاف لأن $f''(x) \neq 0$

• الرسم



الشكل (23)

رسم منحنيات بعض الدوال الأسية 4 – 7 – 2

أ• ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = e^x$

الحل :

• إن مجال هذه الدالة هو R ومداها هو R^+ وهي مستمرة في جميع نقاط مجالها لأنه لكل $a \in R$ لدينا :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} e^x = e^a = f(a)$$

• التقاطع مع المحاور الإحداثية :

مع ox : نجعل $y = 0$ فنجد أن $e^x = 0$ وهذه المعادلة غير محققة ابداً ولذلك فــإن منحنى هذه الدالة لا يقطع المحور ox .

مع oy : نجعل $x = 0$ فنجد أن $y = 1$ ونقاط التقاطع هي : $(0, 1)$

• التماثل :

غير متماثل بالنسبة للمحور ox لأن $f(x) \neq - f(x)$

غير متماثل بالنسبة للمحور oy لأن $f(-x) \neq f(x)$

غير متماثل بالنسبة لنقطة الأصل لأن $f(-x) \neq - f(x)$

• الفروع اللانهائية والمستقيمات والمنحنيات المقاربة :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ ولذلك يوجد لمنحنى $f(x)$ فروع لانهائية .

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ولذلك فإن المحور ox هو خط مقارب لمنحنى هذه الدالة .

• النقاط الحرجة وإشارة $f'(x)$ والقيم القصوى :

$$f'(x) = e^x > 0 \qquad \forall x \in R$$

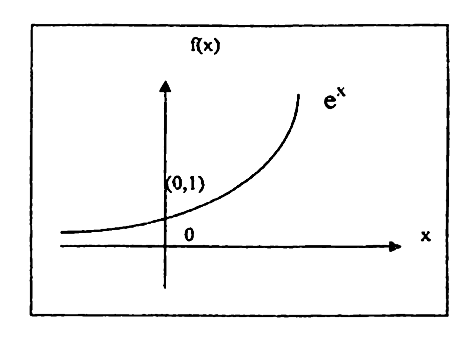
ولذلك فإن منحنى هذه الدالة متزايد وليس للدالة $f(x)$ نقاط حرجة ولذلك فليس له قيم قصوى .

• التقعر والانعطاف:

$$f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x \in R$$

ولذلك فليس لمنحنى $f(x)$ نقاط انعطاف لأن $f''(x) \neq 0$ وتقعره نحو الأعلى لأن $f''(x) > 0$

• الرسم .

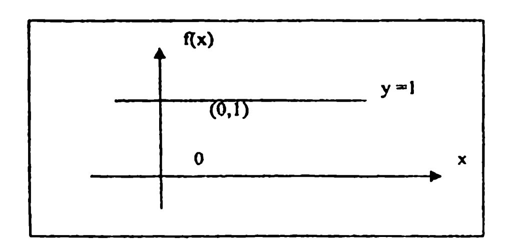


الشكل (24)

2• ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = a^x$ حيث $0 < a$

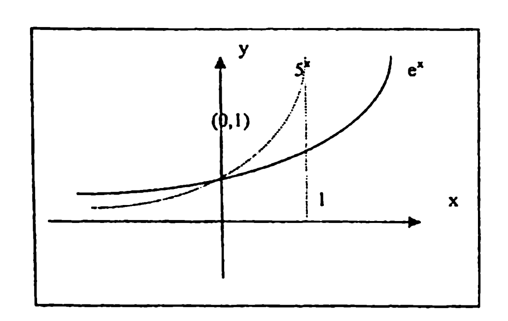
الحل :

* إذا كانت $a = 1$ فإن $y = f(x) = 1$ هو دالة ثابت ورسم منحناه هو :



الشكل (25)

• إذا كانت $1 < a$ فإن منحنى هذه الدالة يشبه تماماً منحنى الدالة $y = e^x$ غير أن تقعـره يزداد كلما ازداد العدد a .



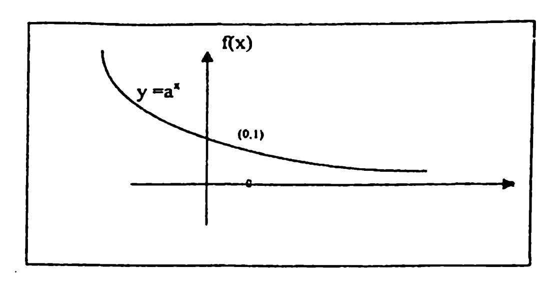
الشكل (26)

* إذا كانت $0 < a < 1$ فإن :

$$f'(x) = a^x . \ln a < 0$$

$$f''(x) = a^x . (\ln a)^2 > 0$$

لذلك فإن منحنى $y = a^x$ في هذه الحالة ستكون متناقصة وتقعره نحو الأعلى ورسمه هو :



الشكل (27)

3. ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = e^{-\frac{1}{x-1}}$

الحل :

- إن مجال هذه الدالة هو $R\backslash\{1\}$ وهي مستمرة في مجالها .
- التقاطع مع المحاور الإحداثية :

مع ox : لا يوجد نقاط تقاطع لأن $y = 0$ تعطي $e^{-\frac{1}{x-1}} = 0$ وهذا ليس ممكناً .

مع oy : نجعل $x = 0$ فنجد أن $y = e$ ونقطة التقاطع هي $(0, e)$.

- التماثل :

منحنى هذه الدالة غير متماثل بالنسبة لأي من المحاور وكذلك بالنسبة لنقطة الأصل.

- النقاط الحرجة وإشارة $f'(x)$ والقيم القصوى :

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \quad > 0 \qquad \forall x \in R\backslash\{1\}$$

فالدالة متزايدة في $(-\infty, 1)$ وفي $(1, \infty)$ وليس له قيم قصوى لعدم وجود نقاط حرجة .

- التقعر والانعطاف :

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{-2x+3}{(x-1)^4}$$

ونلاحظ أن $f''(x) = 0$ عندما $x = \frac{3}{2}$.

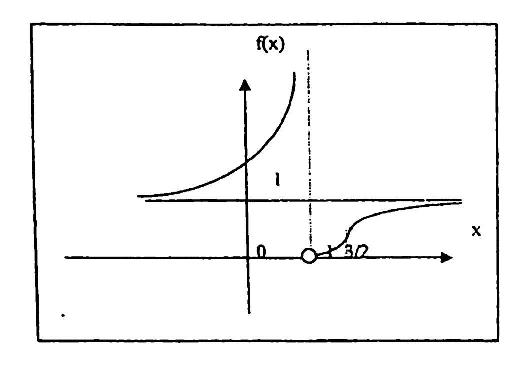
والجداول التالية تبين إشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		∪	‖	∪		∩	

ويتضح من الجدول الأخير أن منحنى الدالة يغير جهة تقعره عند النقطة $(\frac{3}{2}, e^{-2})$

• الرسم



الشكل (28)

رسم منحنيات بعض الدوال اللوغارتمية 4 – 6 – 3

1. ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \ln x$

الحل :

• إن مجال هذه الدالة هو R^+ وهي مستمرة على هذا المجال .

• التقاطع مع المحاور :

مع ox : نضع $y = 0$ فنجد $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$.

مع oy : لا يتقاطع مع هذا المحور لأن $x = 0$ ليست من مجال هذه الدالة .

• التماثل :

منحنى هذه الدالة غير متماثل بالنسبة لأي من المحاور وكذلك بالنسبة لنقطة الأصل .

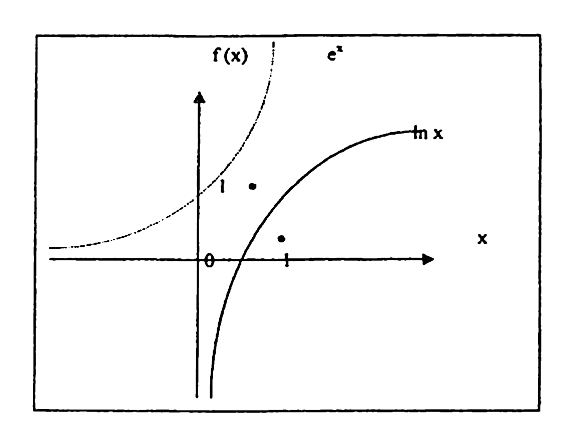
• النقاط الحرجة وإشارة $f'(x)$ والقيم القصوى :

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ لكل x من مجال هذه الدالة الذي هو R^+ ولذلك فإن هذه الدالة متزايدة دوماً .

• التقعر والانعطاف :

$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$ لكل x من مجال هذه الدالة ، لذلك فإن منحنى هذه الدالة يتقعر نحو الأسفل و لا يمر بنقاط انعطاف .

• الرسم .



الشكل (29)

ملاحظة : بالاعتماد على مفهوم الدالة العكسية ، وبمعرفة أن الدالة $f(x) = \ln x$ هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = e^x$ ، وبمعرفة منحنى $f(x) = e^x$ ، يمكن أن نرسم مباشرة منحنى $f(x) = \ln x$ الذي نراه في الرسم أعلاه .

2. ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \log_2 x$

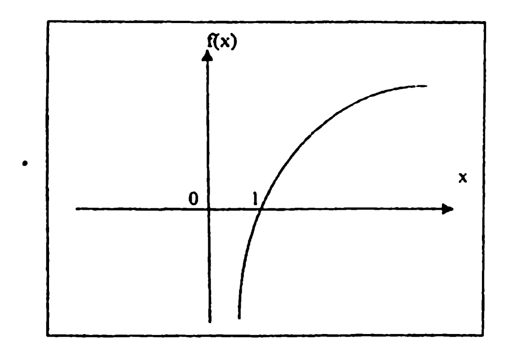
الحل :

كما في المثال السابق يمكن أن نجد بسهولة أن :

مجال هذه الدالة هو R^+ وأنه لا يتقاطع مع المحور oy ويتقاطع مع المحور ox في النقطة $(1,0)$.

وأن $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} > 0$ لكل x من مجال هذه الدالة ولذلك فإن منحنى هذه الدالة متزايد دوما وليس له نقاط قصوى وبما أن : $f''(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln 2} < 0$ فإن منحنى هذه الدالة مقعر نحو الأسفل ولا يمر بنقاط انعطاف .

الرسم :



الشكل (30)

تمرين :

ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

3• ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = \ln (x^2 + 2)$

الحل :

- مجال هذه الدالة هو R وهي مستمرة على هذه المجال .
- التقاطع مع المحاور :

مع ox : نجعل $y = 0$ فنجد $\ln (x^2 + 2) = 0$ وهذه المعادلة غير محققة مهما كانت x .

مع oy : نجعل $x = 0$ فنجد $y = \ln 2$ فنقطة التقاطع هي $(0, \ln 2)$.

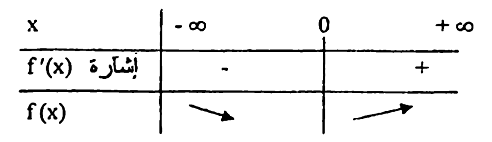
• التماثل :

إذا بدلنا x بـــ -x نجد أن الدالة لا يتغير ولذلك فإن منحنى هذه الدالة متماثل

• النقاط الحرجة وإشارة $f'(x)$ والقيم القصوى :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$$

ونلاحظ أن $f'(x) = 0$ عند $x = 0$ وهي نقطة حرجة لهذه الدالة .



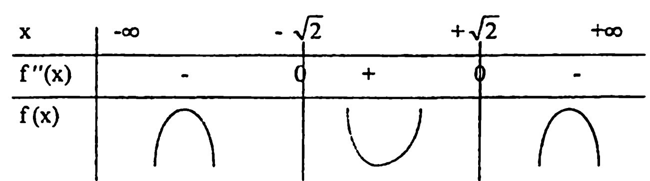
x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

من هذا الجدول نجد أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى عند $x = 0$ وهذه القيمة هي $f(0) = \ln 2$

• التقعر والانعطاف :

$$f''(x) = \frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^4}$$

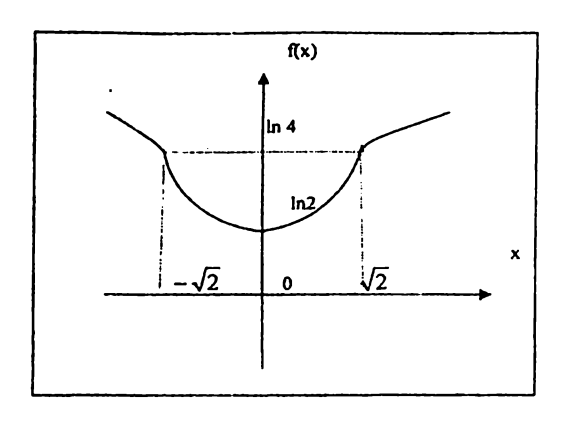
ونلاحظ أن $f''(x) = 0$ عندما $-2x^2 + 4 = 0$ أي عندما $x = \pm\sqrt{2}$ وجدول إشارة $f''(x)$ هو :



x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		∩		∪		∩	

من الجدول نجد أن منحنى هذه الدالة يتقعر نحو الأسفل في الفترة $(-\infty,-\sqrt{2})$ وفي الفتـــرة $(\sqrt{2},+\infty)$ وهو يتقعر نحو الأعلى في الفترة $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ويمر بنقطتي انعطـــاف همـــا: $(-\sqrt{2},\ln 4)$ و $(\sqrt{2},\ln 4)$

الرسم :



الشكل (31)

تمارين

- في التمارين 1 إلى 5 ، بين أن كان يمكن تطبيق مبرهنة فيرما على الدالة المعطاة أم لا . وأوجد النقطة c الموافقة .

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ في الفترة $[-3,3]$
2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ في الفترة $[-2,2]$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ في الفترة $[-1,1]$
4. $f(x) = |x|$ في الفترة $[-1,]$
5. $f(x) = x^2 + 1$ في الفترة $[-2, 1]$

- في التمارين 6 إلى 10 ، برهن على أن للدالة f تحقق شروط مبرهنة رول وأوجد c التيَ تحقق $f'(c) = 0$.

6. $f(x) = x^3 - x$ على الفترة $[0, 1]$
7. $f(x) = |x^3| - 3x^2$ على الفترة $[-2, 3]$
8. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ على الفترة $[0,3]$
9. $f(x) = x^n (x-2)$ على الفترة $[0, 2]$
10. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ على الفترة $[1, 2]$

• في التمارين 11 إلى 15 ، برهن على أن الدالة f تحقق شـروط مبرهنـة التزايـدات المحدودة (لاغرانج) وأوجد النقاط c الموافقة .

•11 $f(x) = 3 - 4x\sqrt{x}$ على الفترة $[1, 4]$

•12 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ على الفترة $[1, 8]$

•13 $f(x) = x^3 - x$ على الفترة $[0, 3]$

•14 $f(x) = 3(x+2)$ على الفترة $[2,3]$

•15 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ على الفترة $[-2, 2]$.

• في التمارين 16 إلى 20 ، أجب على المطلوب في كل تمرين .

•16 ليكن $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ ax^2 + bx + c & ; x < 1 \end{cases}$ عين الثوابت a و b و c حتى تحقـق هـذه الدالة شروط مبرهنة رول على الفترة $[0, 4]$.

•17 إذا كان $f_m(x) = m x^2 - 4(m-1)x + 3m$ حيث m عدد $\neq 0$.

برهن على أن الدالة f_m تحقق شروط مبرهنة لاغرانج على الفترة $[1,3]$ مهما كانت m وأوجد c الموافقة .

•18 لتكن f دالة تحقق $|f'(x)| \leq M$ لكل x من $[a, b]$ استخدم مبرهنـة لاغـرانج لتبرهن على أن : $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

واستفد من ذلك في إيجاد حد أعلى و حد أدنى لقيمة $\sqrt{101}$ مستخدمـا الدالـة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[100, 101]$.

•19 استخدم نظرية رول لتبرهن على أن للمعادلة : $\tan x = 1-x$ جذراً يقع في الفترة $(0, 1)$.

•20 ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \neq 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$

هل تحقق هذه الدالة شروط مبرهنة لاغرانج على الفترة $[1, 5]$ وهل يوجد c من $(1,5)$ بحيث يكون $f'(c) = \dfrac{f(5) - f(1)}{5-1}$ ؟

• في التمارين 21 إلى 25 ،أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f

• 21 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

• 22 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

• 23 $f(x) = x^4 - 2x3 + 1$

• 24 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

• 25 $f(x) = (x-1)^2 (x-3)^2$

• في التمارين 26 إلى 30 ، أوجد القيم القصوى المحلية للدوال المعطاة .

• 26 $f(x) = x^3 - 3x \quad \dfrac{1}{4}$

• 27 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

• 28 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

• 29 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

• 30 $f(x) = x \sqrt{1-x^2}$

• في التمارين 31 إلى 35 ، استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحدد نوع القيم القصوى للدوال المعطاة .

• 31 $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$

• 32 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$

•33 $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{2}x$

•34 $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

•35 $f(x) = (x^2 - 1)^2$

• في التمارين 36 إلى 40 ، أوجد الفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعراً نحو الأعلى وتلك التي يكون فيها مقعراً نحو الأسفل . وعين نقاط الانعطاف (إن وجدت).

•36 $f(x) = -4x^2 - 8x + 3$

•37 $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

•38 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

•39 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

•40 $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+4)}{x}$

• في التمارين 41 إلى 45 ، أستفد من قاعدة لوبيتال في إيجاد النهايات المطلوبة .

•41 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

•42 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln|\ln x|$

• 43 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

• 44 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4^x-3^x-1}{x-1}$

• 45 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

• في التمارين 46 إلى 50 ، أوجد المستقيمات المقاربة (والنقاط المقاربة) لمنحنيات الدوال المعطاة .

• 46 $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ • 47 $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-1}$

• 48 $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{4-x}}$ • 49 $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2+1}$

• 50 $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

• في التمارين 51 إلى 60 ، أرسم منحنيات الدوال المعطاة .

•51 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ • 52 $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$

• 53 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ • 54 $f(x) = \dfrac{x+1}{x+4}$

•55 $(x)\ e^{2x} - 2\ e^x$ •56 $f(x) = e^{-\frac{1}{x-2}}$

• 57 $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$ • 58 $f(x) = \ln\dfrac{x}{x-1}$

• 59 $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$ • 60 $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{4-x}$

ثانياً : التطبيقات العملية والاقتصادية للاشتقاق

للمشتقات دور كبير في حل مسائل نصادفها في الحياة العملية وفي العلوم الأخرى ، وسنعرض فيما يلي بعضاً من المسائل العملية التي نستخدم المشتقة في حلها .

4 - 7 إيجاد القيمة التقريبية لجذور معادلة من الشكل $f(x) = 0$

(تقريب نيوتن – رافسون Newton-Raphson)

نحتاج في حياتنا العملية لحل معادلات من الشكل : $f(x) = 0$

مثل :

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x^5 - \frac{1}{x} + \sqrt{x} = 0$$

أو غير ذلك ...

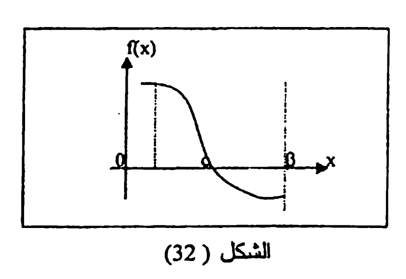
وحل المعادلة $f(x) = 0$ معناه إيجاد الأعداد c التي تحقق $f(c) = 0$. نسمي الأعداد c هذه بجذور المعادلة $f(x) = 0$ أو أصفار الدالة $f(x)$.

وفي حل معادلة من الشكل $f(x) = 0$ نتعرض لسؤالين :

الأول هو : هل يوجد جذور لهذه المعادلة ؟

الثاني هو : إذا كان لهذه المعادلة جذر c فكيف نوجد c ؟

وللإجابة على هذين السؤالين نلاحظ أنه إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[\alpha, \beta]$ حيث $\alpha < \beta$ وكانت $f(x)$ تغير إشارتها في هذه الفترة فإن منحنيه يقطع المحور ox في نقطة واحدة على الأقل c ويكون $f(c) = 0$ أي أن العدد c يكون جذراً للمعادلة $f(x) = 0$ ويقع هذا العدد c بين α و β ولكن ما هو هذا العدد ؟



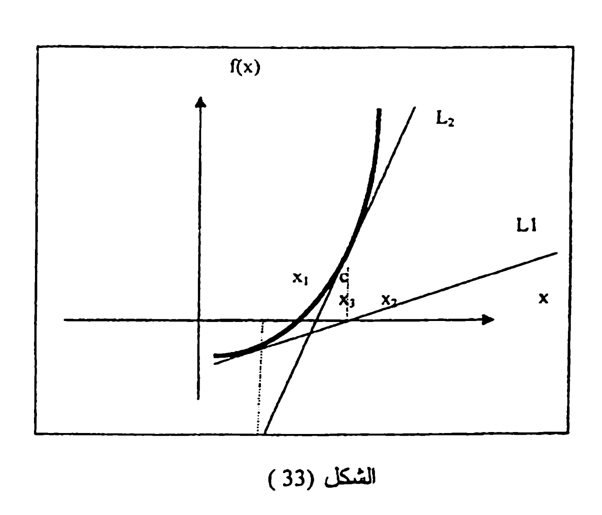
الشكل (32)

قد لا نستطيع إيجاد القيمة الدقيقة للعدد c ولكننا نستخدم طريقة نيوتن – رافسون في إيجاد قيمة تقريبية للعدد c ونلخص هذه الطريقة بما يلي :

نختار نقطة معلومة x_1 من ox قريبة من c وننشئ المماس L_1 لمنحني $f(x)$ في النقطة $(x_1, f(x_1))$ فيقطع المحور ox في نقطة x_2 (أقرب إلى c من x_1).
ننشئ المماس L_2 لمنحني $f(x)$ في النقطة $(x_2, f(x_2))$ فيقطع المحور ox في نقطة x_3 (أقرب إلى c من x_2) ... وهكذا نحصل على المتتالية :

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$

التي تقترب من c . وتوجد علاقة تربط بين x_n و x_{n+1} تسهل علينا عملية التعرف على قيم النقاط ... $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ نحصل على هذه العلاقة كما يلي :



الشكل (33)

إن معادلة المماس المار من النقطة $(x_n, f(x_n))$ هي : $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$
وهذا المماس سيقطع المحور ox في النقطة $(x_{n+1}, 0)$ ولذلك فهذه النقطة تحقق معادلته ، أي:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

ومنه نجد أن :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وهكذا نجد x_n القريبة من c بقدر ما نريد .
ولكن لهذه الطريقة بعض العيوب نذكر منها :

- يمكن أن نجد في بعض الحالات أن $f'(x_n) = 0$.
- قد نجد أن x_{n+1} أبعد من x_n الى c أي أن المتتالية التي ننشئها تبتعد عن c .

وقد وُجد أن هذه العيوب تزول بتحقق الشرط التالي :

حيث نختار x_1 على يمين c أو على يسارها بحيث يتحقق هذا الشرط $f(x_1) . f''(x_1) > 0$ كما توضح الأمثلة التالية :

مثال

برهن على أن للمعادلة $x^2 - 3 = 0$ جذراً في الفترة [1, 2] وأوجد قيمة تقريبية لهذا الجذر .

الحل :

إن $f(x) = x^2 - 3$ دالة مستمرة على الفترة [1,2] وهي تغير إشارتها في هذه الفترة لأن : $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$. إذن يوجد لهذه المعادلة جذر في هذه الفترة .

نوجد $f''(x)$ ثم نحسب $f(1) f''(1)$ و $f(2) . f''(2)$ لنرى أيها تكون موجبة :

$f'(x) = 2x$ و $f''(x) = 2$ منه نجد أن $f(1) f''(1) < 0$ بينما $f(2) f''(2) > 0$ لذلك نأخذ $x_1 = 2$ فتكون :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$f(x_2) = f(\frac{7}{4}) = \frac{1}{16}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{7}{4} - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{2}} = 1.73214$$

$$f(x_3) \approx 0$$

ولذلك فإن $c \approx x_3 = 1.73214$ وهي قيمة الجذر المطلوب .

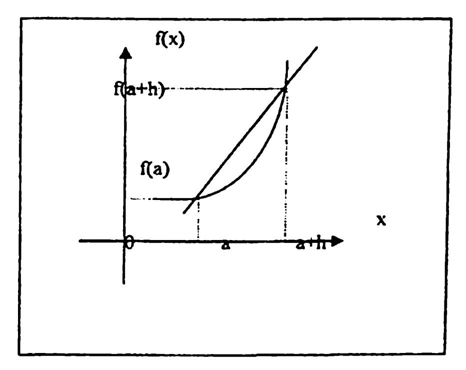
تمرين : برهن على أن للمعادلة $x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ جذراً في الفترة [0, 1] وأوجد قيمة تقريبية لهذا الجذر .

4 - 8 المشتقة كمعدل في التغير وتطبيقاتها

معدل التغير الآني 4 - 8 - 1

إذا كان $y = f(x)$ دالةً ما وتغيرت x من a الى $a+h$ فإن y ستتغير من $f(a)$ الى $f(a+h)$ ويكون $(a+h) - a = h$ هو مقدار تغير x عند a بينما $f(a+h) - f(a)$ هو مقدار تغير y عند a وتكون النسبة : $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$ هي نسبة تغير y إلى تغير x عند a فمثلا لو كان $y = x^2$ وتغيرت x من 1 إلى 2 فإن y تتغير من 1 إلى 2^2 ونسبة تغير y إلى تغير x هي $\frac{4-1}{2-1}=3$ بينما لو تغيرت x من 3 إلى 2 فإن y تتغير من 9 إلى 4 وتكون نسبة تغير y إلى تغير x هي $\frac{4-9}{2-3}=5$

والنسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$ تمثل كما رأينا ميل المستقيم القاطع لمنحنى الدالة $f(x)$ والمار من النقطتين $(a, f(a))$ و $((a+h), f(a+h))$



الشكل (34)

وإن $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تمثل معدل التغير الآني (النقطي) للمتغير y (أو للدالة $f(x)$) بالنسبة للمتغير x في النقطة a ، وقد رأينا أن هذا المعدل هو $f'(a)$.

وبشكل عام فإن $\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)$ يمثل معدل التغير الآني في y بالنسبة الى x في أي نقطة x وهذا المعدل يتغير من نقطة إلى أخرى فقد يكون موجباً وقد يكون سالباً . وفي حال كونه موجباً يكون y متزايد كما سبق أن رأينا .

ولمفهوم معدل التغير الآني في y بالنسبة الى x (الذي هو المشتق) تطبيقات عملية عديدة في الحياة الاقتصادية نذكر منها ما يلي :

المعدلات المترابطة 4 – 8 – 2

في كثير من المسائل نجد دوال مترابطة فيما بينها عن طريق الزمن كما هو الحال في مسائل السرعة والتسارع في حركة الأجسام .

فإذا كان A متحركا يسير على خط مستقيم احداثيته في اللحظة t هي $x(t)$ واحداثيته في اللحظة $t+h$ هي $x(t+h)$ فإن نسبة التغير في المسافة إلى الزمن هو $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ وهذه النسبة تعبر عن السرعة المتوسطة لهذا المتحرك والنهاية $\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ تعبر عن السرعة الآنية لهذا المتحرك في اللحظة t . التي يرمز لها بالرمز $v(t)$ أي أن :

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=x'(t)$$

وهذه السرعة هي دالة بالزمن t .

أما $\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=v'(t)=x''(t)$ فإنها تعبر عن تسارع المتحرك A في اللحظة t

مثال

جسم A يتحرك على خط مستقيم بحيث أن وضعه في اللحظة t هو :

$$x(t)=t^3-12t^2+36t-27$$

ادرس حركة هذا الجسم .

الحل :

لندرس حركة هذا الجسم من $t=0$ إلى $t=10$ إن موقع الجسم في لحظة انطلاقه هو $x(0)=-27$. وان موقع الجسم في اللحظة $t=10$ هو $x(10)=133$. وان السرعة الآنية لهذا الجسم أثناء حركته هي :

$$v(t)=x'(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$$

وللتعرف على جهة حركة هذا الجسم ندرس إشارة $v(t)$:

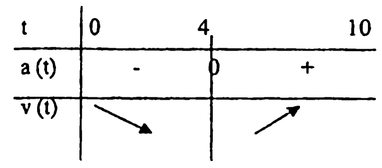
t	0		2		6		10
v(t)		+	0	−	0	+	
x(t)		↗		↘		↗	

ومن هذا الجدول نرى أن المتحرك انطلق في اللحظة t باتجاه ما، على الخط المستقيم واستمر هذا الاتجاه حتى اللحظة $t = 2$ حيث عكس اتجاهه وعاد من حيث أتى حتى اللحظة $t = 6$ حيث عاد من جديد ليأخذ الاتجاه الذي انطلق به .

ندرس الآن تسارع هذا الجسم لنتعرف على طبيعة حركته :

$$a(t) = x''(t) = 6t - 24 = 6(t - 4)$$

نتعرف على إشارة هذا التسارع



t	0		4		10
a (t)		-	0	+	
v (t)		↘		↗	

ومن هذا الجدول نرى أن هذا الجسم ينطلق في اللحظة $t = 0$ بسرعة $v(0) = 36 \text{ m/s}$ ثم تخامدت سرعته حتى اللحظة $t = 4$ حيث بلغت $v(4) = -12 \text{ m/s}$ حيث كان الجسم في هذه اللحظة يتجه بالاتجاه المخالف لانطلاقه. ثم بعد هذه اللحظة تبدأ سرعة هذا الجسم بالتزايد.

3 – 8 – 4 الحدية في الاقتصاد

- إن موضوع المعدلات ومعدلات التغير الذي بحثناه قبل قليل ، يلعب دوراً هاماً في التطبيقات الاقتصادية حيث نجد هذا الموضوع عند الاقتصاديين تحت اسم **الحدية** :

ونجد المعدلات والحدية في مسائل شتى مثل :

- معدل التكلفة لسلعة ما والتكلفة الحدية لها .
- معدل الدخل لمؤسسة ما والدخل الحدي لهذه المؤسسة .
- معدل الربح لتاجر وربحه الحدي .
- معدل الإنتاج والإنتاج الحدي.
- معدل الاستهلاك والاستهلاك الحدي .

إلى غير ذلك من المسائل الاقتصادية الكثيرة .

ومن أجل فهم دور المشتقة في معالجة مثل هذه المسائل الاقتصادية سنقدم شرحا نظريا موجزا لواحدة من هذه المسائل المتماثلة ثم نتبع ذلك بعدد من الأمثلة المتنوعة .

- إذا كانت التكلفة الكلية في مؤسسة إنتاجية ترتبط بعدد الوحدات المنتجة في هذه المؤسسة بدالة تكلفة هو $f(x)$ حيث x هو عدد الوحدات المنتجة فإنه عند تغير عدد الوحدات المنتجة مقدارا قدره Δx .

تكون التكلفة الكلية قد تغيرت مقدارا قدره $f(x+\Delta x) - f(x)$ وتعبر النسبة $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ عن متوسط التغير في التكلفة الكلية ، كما أنها تعبر أيضا عن مقدار تغير تكلفة الوحدة المنتجة الواحدة .

أما النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ فإنها تعبر عن التغير الآني أو الحدي للتكلفة وهذه النهاية تمثل مشتقة $f(x)$ كما رأينا . ولذلك فإن الدالة $f'(x)$ يسمى عند الاقتصاديين بدالة التكلفة الحدية . أما النسبة $\frac{f(x)}{x}$ فإنها تعبر عن معدل التكلفة .

إذن لدينا المفاهيم التالية :

إذا كان $f(x)$ = دالة التكلفة فإن $\frac{f(x)}{x}$ = معدل التكلفة و $f'(x)$ = التكلفة الحدية.

وبشكل مشابه نجد أنه إذا كان $R(x)$ دالة الدخل فإن $\frac{R(x)}{x}$ هو معدل الدخل و $R'(x)$ هو الدخل الحدي وهكذا .

أمثلة

1. شركة صناعية تنتج أجهزة كمبيوتر عددها x في كل أسبوع وبينت الدراسة أن :

دالة التكلفة كان $c = 3000 + 2x$

دالة الدخل كان $R = 10x - \frac{x^2}{500}$

وبالتالي فإن دالة الربح هو $P = R - c$

فإذا كان الإنتاج يزداد بمعدل 100 جهاز في الأسبوع في لحظة إنتاج 1000 جهاز . فأوجد معدل التغير للتكلفة والدخل والربح في تلك اللحظة .

الحل :

إن كمية الإنتاج x ترتبط بالزمن t كما ورد في النص أي أن $x = x(t)$

وبحسب الفرض لدينا معدل التغير الآني (الحدي) لكمية الإنتاج في اللحظة التي يكون فيها $x = 1000$ هو 100 .

أي أن $$\frac{dx}{dt}_{|x=1000} = 100$$

والمطلوب هو معدل التغير الآني (الدالة الحدي) لكل من التكلفة ، والدخل والربح .

إن c يرتبط بـ x و x يرتبط بـ t والمطلوب هو $\frac{dc}{dt}$

وبحسب قاعدة السلسلة يكون :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

وفي اللحظة المطلوبة يكون :

$$\frac{dc}{dt}_{|x=1000} = 2 \times 100 = 200$$

أي أن معدل التكلفة في لحظة إنتاج 1000 جهاز هو 200 .

أما معدل تغير الدخل الآني (الدخل الحدي) فهو :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (10 - \frac{x}{250}) \frac{dx}{dt}$$

وفي اللحظة المطلوبة يكون الدخل الحدي :

$$\frac{dR}{dt}_{|x=1000} = \left(10 - \frac{1000}{250}\right) \times 100 = 600$$

أما معدل تغير الربح الآني (الربح الحدي):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dc}{dt} = (10 - \frac{x}{250}) \frac{dx}{dt} - 2 \cdot \frac{dx}{dt}$$
$$= (8 - \frac{x}{250}) \cdot \frac{dx}{dt}$$

وفي اللحظة المطلوبة يكون الربح الحدي :

$$\frac{dp}{dt}_{|x=1000} = (8 - \frac{1000}{250}) \times 100 = 400$$

2. إذا علمت أن دالة التكلفة الكلية C يتعلق بعدد الوحدات المنتجة x وفق العلاقة التالية

$$C = 400x - \frac{1}{150} x^5$$

أوجد التكاليف الحدية عندما يكون حجم الإنتاج تسع وحدات .

الحل :

إن دالة التكاليف الحدية هو : $C' = 400 - \frac{1}{30} x^4$

وعندما يكون حجم الإنتاج تسع وحدات يكون $C'' = 400 - \frac{1}{30} (9)^4 = 181.3$

ويدل هذا الرقم على أنه بوجود حجم إنتاج قدره تسع وحدات فإن تكاليف إنتاج الوحدة العاشرة يبلغ 181.3 وحدة نقد .

3• إذا كان سعر القطعة من سلعة ما يرتبط بالكمية المطلوبة x وفق الدالة :

$p = 15 - 2x$

أوجد معدل تغير الإيراد الحدي الذي يتحقق إذا تزايد الطلب من وحدتين إلى ثلاث وحدات .

الحل :

نعلم أن الإيراد = عدد الوحدات المنتجة x سعر الوحدة ولذلك فإن دالة الإيراد هو:

$R = x(15 - 2x) = 15x - 2x^2$

أما الإيراد الحدي فهو : $R' = 15 - 4x$

وعندما $x = 2$ يكون الإيراد الحدي : $R' = 15 - 4 \times 2 = 7$

وهذا يعني أنه إذا تزايد الطلب من وحدتين إلى ثلاث وحدات فإن الإيراد الحدي يتزايد بمقدار 7 وحدات نقدية .

4• من المعلوم أن هناك علاقة بين الإعلان عن سلعة وكمية المبيعات من هذه السلعة ، ففي حالة عدم وجود دعاية ، تتناقص الكمية المباعة من السلعة مع الزمن . وهناك دوال تصف تناقص الكمية المباعة بدون دعاية مع الزمن . ومن هذه الدوال النموذج التالي :

$y = y_0 e^{-at}$

حيث y هي الكمية المباعة في اللحظة t و a ثابت موجب ، y_0 كمية المبيعات في اللحظة $t = 0$.

وقد نسأل عن معدل التغير في نقصان كمية المبيعات الذي هو y' أو قد نسأل عن التغير النسبي لكمية المبيعات الذي هو $\frac{y'}{y}$ إلى غير ذلك من الأسئلة المرتبطة بالمشتقة.

9 - 4 مسائل القيم القصوى الاقتصادية

هناك مسائل اقتصادية كثيرة يظهر فيها دور المشتقة من خلال موضوع القيم القصوى كما توضح الأمثلة التالية :

أمثلة

1• يراد إنشاء خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة بحجم ثابت V فإذا كانت تكلفة السنتمتر المربع الواحد من القاعدة والغطاء هو a ديناراً ، ومن الجوانب هو b ديناراً ، فما هي أبعاد هذا الخزان حتى تكون التكلفة أصغرية .

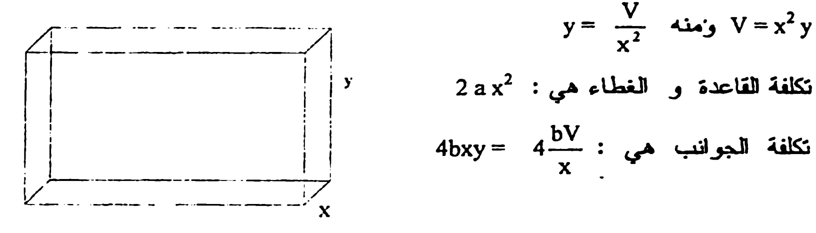
الحل :

إذا فرضنا أن x طول ضلع القاعدة وأن y هو ارتفاع الخزان فإن

$V = x^2 y$ ومنه $y = \frac{V}{x^2}$

تكلفة القاعدة و الغطاء هي : $2ax^2$

تكلفة الجوانب هي : $4bxy = 4\frac{bV}{x}$



التكلفة الإجمالية هي : $T(x) = 2ax^2 + \frac{4bV}{x}$

ويكون المطلوب هو إيجاد القيمة الصغرى للدالة $T(x)$ ، ولذلك نوجد النقاط الحرجة من جعل $T'(x) = 0$ أي $4ax - \frac{4bV}{x^2} = 0$ أي $\frac{4ax^3 - 4bV}{x^2} = 0$

ومنه $x^3 = \frac{bV}{a}$ وبالتالي $x = \sqrt[3]{\frac{bV}{a}}$ وتكون التكلفة الصغرى هي :

$$T\left(\sqrt[3]{\frac{bV}{a}}\right) = 2a\left(\sqrt[3]{\frac{bV}{a}}\right)^2 + \frac{4bV}{\sqrt[3]{\frac{bV}{a}}}$$

2 • إذا كان دالة التكلفة لإنتاج x من الوحدات هو $f(x) = \frac{x^2}{10000} - \frac{x}{100} + 5$

فأوجد x التي تجعل معدل التكلفة في قيمته الصغرى .

الحل :

إن معدل التكلفة هو $T(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{1000} - \frac{1}{100} + \frac{5}{x}$

والمطلوب هنا إيجاد x التي تجعل $T(x)$ في قيمته الصغرى .

ولذلك نوجد x التي تحقق $T'(x) = 0$ ثم نختار x التي تحقق شروط القيمة القصوى .

3 . إن الطلب على سلعة يزداد كلما نقص سعرها وقد وجدت شركة أن العلاقة بين سعر الوحدة المباعة وعدد الوحدات المباعة هو : $P = P_0 e^{-ax}$ ، حيث a ثابت موجب ، و x عدد الوحدات المباعة في وحدة الزمن و P سعر الوحدة و P_0 سعر الوحدة عندما يكون $x = 0$ فما هي القيم العظمى لدخل الشركة .

الحل :

إن دالة الدخل الناتج عن المبيعات في هذه الحالة هو : $R = x.P = P_0 x e^{-ax}$

والمطلوب هنا هو إيجاد القيمة العظمى لهذه الدالة وهي مسألة ترتبط بالمشتقة الأولى كما نعلم . ويلاحظ من هذا المثال أن للدوال الأسية دور في المسائل الاقتصادية وكذلك الحال بالنسبة للدوال اللوغاريتمية .

تمارين

• في التمارين 1 إلى 5 ، استخدم طريقة نيوتن – رافسون لتوجد القيمة التقريبية المطلوبة .

1. أوجد القيمة التقريبية x_{n+1} للعدد $\sqrt{8.5}$ بحيث يكون $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$

(فائدة : أوجد قيمة تقريبية لصفر الدالة $f(x) = x^2 - 8.5$ أخذاً $x_1 = 3$) .

2. أوجد القيمة التقريبية للأعداد $\sqrt{101}$ و $\sqrt[4]{17}$.

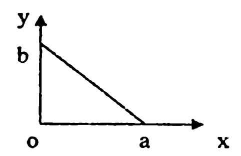
3. أوجد الجذر التقريبي x_{n+1} للمعادلة $x^3 - 3x - 1 = 0$ الواقع في الفترة $[1,2]$ بحيث يكون $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$.

4. أوجد الجذر التقريبي x_{n+1} للمعادلة $x^3 + x = 1$ الواقع في الفترة $(-\infty, \infty)$ بحيث يكون $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-2}$.

5. أوجد الجذر التقريبي x_{n+1} للمعادلة $x^3 - x - 5 = 0$ الواقع في الفترة $[0, 3]$ بحيث يكون $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3}$ (لقد حل نيوتن بنفسه هذا التمرين) .

• في التمارين 6 إلى 10 ، حل المسائل المرتبطة بمعدلات التغير الآتي :

6 • $x\hat{o}y$ زاوية قائمة و $\overline{ab}$ قطعة مستقيمة طولها 10 سم ينزلق طرفها a على الضلع ox وينزلق طرفها b على الضلع oy فإذا كــــان الطرف a يبتعد عن o بمعدل 2 سم /ثا فاحسب مقدار تغير $\overline{ob}$ عندما يكون طول $\overline{oa}$ يساوي 8 سم .



7 • تزداد مساحة السطح الكلي لمكعب بمعدل 0.2 $سم^2$ / ثا ، أحسب معــدل تغيــر طــول حرف المكعب عندما يكون طول الحرف 3 سم ثم احسب معدل تغير حجم المكعب عندما يكون طول الحرف 3 سم .

8 • تتحرك نقطة p (x, y) على منحنى الدالة $y = -x^3 - 3x + 5$ مقتربة مــن المحــور oy بمعدل $\frac{1}{9}$ وحدة طول / ثا ، أحسب معدل تغير بعد p عن المحور ox لحظة مرورها بالنقطة (-1, 8) .

9 • متوازي مستطيلات أبعاده متناسبة طرداً مع الأبعاد 1 ، 3 ، 9 فإذا ازداد أصغر أبعاده بمعدل 0.1 سم في الثانية فاحسب معدل تغير حجمه عندما يكون أصغر أبعاده 3 سم .

10 • تتحرك نقطة p(x, y) على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ عين موضع p في اللحظة التي يكون فيها معدل تغير x يساوي $\frac{2}{3}$ معدل تغير y .

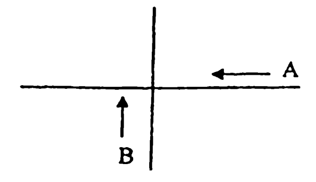
• في التمارين 11 إلى 15 ، حل المسائل المرتبطة بحركة الأجسام على خط مستقيم .

11 • إذا كان A جسماً يتحرك على خط مستقيم وفق الدالة : $h(t) = -16t^2 + v_0 t + h_0$

أوجد القانون الذي يحدد سرعة A في كل لحظة ثم بين جهة الحركة .

12 . سيارتان A و B تسيران على طريقين مستقيمين ومتعامدين :

A بسرعة 60 كم / ساعة و B بسرعة 80 كم / ساعة . تتجهان إلى نقطة تقاطع الطريقين ، ما هي سرعة اقتراب السيارتين من بعض في اللحظة التي تكون فيها A على بعد 20 كم من التقاطع وتكون فيها B على بعد 40 كم من التقاطع .



13 . إذا كانت $M(x, y)$ نقطة تتحرك على المنحنى C وكان معدل ابتعادها عن المحور oy يساوي 2 عندما كان $x = 3$ فأوجد معدل تغير y في هذه النقطة .

14 . إذا كان A متحركاً يتحرك على خط مستقيم وفق الدالة : $h(t) = t^3 - 2t^2 + 1$

أوجد سرعة وتسارع هذا المتحرك في اللحظة $t = 4$.

15 . أوجد السرعة الوسطى والسرعة اللحظية في اللحظة $t = 4$ لنقطة تتحرك على خط مستقيم وفق القانون : $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

- في التمارين 16 إلى 22 ، حل المسائل المرتبطة بالحدية في الاقتصاد .

16 . شركة تصنع أقلاماً عددها x في اليوم ، وقد وجدت إدارة الإنتاج في الشركة أن التكلفة تعطى بالدالة : $C(x) = 2000 + 3x^2$

وان دخل الشركة يعطى بالدالة : $R(x) = \frac{x^3}{600} - x^2 + 1000 \; ; \; x \geq 100$

فإذا كان معدل زيادة الإنتاج هو 10 أقلام في لحظة إنتاج 2000 قلماً فأوجد الدخل الحدي لهذه الشركة ثم أوجد معدل ربح هذه الشركة في لحظة إنتاجها 2000 قلماً .

17 . إذا كان دالة الطلب على سلعة ما هو : $D(x) = 1000 - \frac{x}{10}$

حيث x هو سعر الوحدة . وان دالة التكلفة الكلية هو $Q(x) = 8000 + 50x$

أوجد التكلفة الحدية والدخل الحدي عندما يكون سعر الوحدة من هذه السلعة $x = 40$

18 . شركة أدوية تصنع نوعاً من الدواء على شكل عبوات زجاجية ، التكلفة الثابتة لهذه الشركة 500 ديناراً في الأسبوع والتكلفة الأخرى هي 0.4 ديناراً لكل عبوة .

أوجد التكلفة الحدية لهذه العبوات إذا كان عدد العبوات المنتجة هو x .

19• دالة الطلب على سلعة في شركة ما هو : $4D + 5x = 200$
حيث D عدد الوحدات المطلوبة من السلعة، x سعر الوحدة الواحدة .
أوجد دالة الدخل الحدي ، متى يكون الدخل الإجمالي للشركة أعظمياً .

20• كان دالة التكلفة لإنتاج نوع من الأحذية الرياضية هو : $C(x) = 2x^2 - 8x + 10$
حيث x هو عدد أزواج الأحذية المنتجة في الشركة . أوجد معدل التكلفة ، أوجد أقل معدل تكلفة لزوج من الأحذية ، أوجد التكلفة الحدية لزوج الأحذية .

21• إذا كان دالة الطلب على سلعة ما هو $D = 80 - 3x$
حيث x هو سعر القطعة أوجد الدخل الحدي عندما يكون السعر $x = 5$ وحدات نقدية .

- في التمارين – من 22 إلى 26 – التالية ، حل المسائل المرتبطة بتطبيقات القيم القصوى في الاقتصاد .

22• لنفرض أن الطلب على سلعة ما ، وسعر هذه السلعة يرتبطان وفق العلاقة التالية :

$$p = \frac{600x}{x + 20}$$

حيث p هو سعر السلعة ، x هو عدد الوحدات المطلوبة من السلعة . أوجد القيمة العظمى للإيراد .

23• لدينا صفيحة من الحديد طولها 100 سم وعرضها 50 سم . يراد صنع خزان صغير للمياه وذلك بعد اقتطاع مربعات متساوية من الزوايا الأربعة للصفيحة. احسب طول ضلع المربعات المقتطعة لكي نحصل على أكبر حجم ممكن للخزان .

24• تقوم منشأة صناعية بصنع x وحدة من سلعة ما في السنة ، فإذا علمت ان التكاليف الكلية للإنتاج تتبع عدد الوحدات المنتجة x وفق العلاقة :

$$C = \frac{1}{50}x^2 + 15x + 800$$

وسعر السلعة يرتبط أيضاً بعدد الوحدات المنتجة بالعلاقة : $p = 50 - 0.1x$
والمطلوب تحديد قيمة الربح الأعظمي الذي يمكن أن تحققه المنشأة .

25• يراد صنع خزان على شكل متوازي المستطيلات قاعدته مربع ووجهه العلوي مفتوح وسعته 108 م^2 . أوجد أبعاد هذا الخزان لكي تكون مساحته أصغرية .

26• سلك طوله 30 سم ، نريد أن نصنع منه مثلثين كل منهما متساوي الأضلاع . عين طول ضلع كل منهما لكي يكون مجموع مساحتيهما أصغر ما يمكن .

الفصل الخامس

التكامل وتطبيقاته

الفصل الخامس

التكامل وتطبيقاته

5 - 1 مفهوم التكامل غير المحدود

لقد تعرفت في فصل المشتقات كيف تجد مشتقة دالة معطاة ، فمثلا إذا كانت $f(x) = x^2 + 5x + 2$ فإن مشتقتها $f'(x) = 2x + 5$.

والسؤال الذي يطرح نفسه ، إذا علمت أن $g'(x) = 3x + 7$ مشتقة الدالة g فكيف تستطيع إيجاد هذا الدالة g ؟ نلاحظ مثلا ان مشتقة كل من الدوال :

$$g_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x + 5$$

$$g_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x - 5$$

$$g_3(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x + 12$$

هي $3x + 7$ ، أي أن إضافة ثابت مثل c لا تؤثر على الاشتقاق ولهذا نقول بشكل عام ان

$$g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 7x + c$$

هي الدالة التي مشتقتها

$$g'(x) = 3x + 7$$

تسمى عملية إيجاد الدالة g إذا علمت مشتقتها g' **عملية التكامل** ، ويسمى g تكامل g' بالنسبة للمتغير x ، ونرمز لذلك على النحو التالي :

$$g(x) = \int g'(x)\,dx$$

كما نسمي الثابت c **ثابت التكامل** . وأيضاً نسمي $\int g'(x)\,dx$ **التكامل غير المحدود للدالة** g' بالنسبة للمتغير x.

مثال

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

وذلك لأن مشتقة $g(x) = \frac{x^4}{4} + c$ هي $g'(x) = x^3$

نعطي المبرهنة التالية صيغ بعض التكاملات المشهورة :

مبرهنة 5 - 1 - 1

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ حيث أن $n \neq -1$

3. $\int e^x\, dx = e^x + c$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ حيث أن $x \neq 0$

وبرهان هذه المبرهنة سهل جداً ويتم عن طريق ايجاد مشتقة الطرف الأيمن من كل مساواة فمثلا :

1. إذا $g(x) = x + c$ فإن $g'(x) = 1$ وعليه فإن $\int 1\, dx = x + c$

2. إذا كان $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ فإن $g'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$

وعليه فإن $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3. إذا كانت $g(x) = e^x + c$ فإن $g'(x) = e^x$ وعليه فإن $\int e^x\, dx = e^x + c$

4. لاحظ ان $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

أولا : لنفرض أن $x > 0$ ولنفرض $g(x) = \ln x + c$ ومنها $g'(x) = \frac{1}{x}$

إذن $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ عندما $x > 0$.

ثانيا : لنفرض ان $x < 0$ ولنفرض $g(x) = \ln(-x) + c$ ومنها $g'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

إذن $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$ عندما $x < 0$.

وبشكل عام يكون $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

وللاستفادة من المبرهنة (5-1-1) بشكل أوسع نذكر في المبرهنة التالية بعض خواص التكامل .

مبرهنة 5 - 1 - 2

1. $\int a f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$

حيث a ثابت لا يعتمد على x

2. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x)\, dx$

وبرهان هذه المبرهنة مباشر باستخدام خواص الاشتقاق فمثلا:

1. إذا كان $g(x) = a\,h(x)$ فإن $g'(x) = a\,h'(x)$ نعلم أن

$$\int g'(x)\,dx = g(x) \quad , \quad \int h'(x)\,dx = h(x)$$

ولهذا فإن $\int a\,h'(x)\,dx = \int g'(x)\,dx = a\,h(x) = a\int h'(x)\,dx$

وهذا يثبت الجزء الأول من المبرهنة بوضع $f(x) = h'(x)$.

2. إذا كان $g(x) = h_1(x) + h_2(x)$ فإن $g'(x) = h_1'(x) + h_2'(x)$ ، ونعلم أن :

$$\int g'(x)\,dx = g(x) \quad , \quad \int h_1'(x)\,dx = h_1(x) \quad , \quad \int h_2'(x)\,dx = h_2(x)$$

ولهذا فإن

$$\int g'(x)\,dx = \int (h_1'(x) + h_2'(x))\,dx = \int (h_1(x) + h_2(x))'\,dx$$
$$= h_1(x) + h_2(x) = \int h_1'(x)\,dx + \int h_2'(x)\,dx$$

وهذا يثبت الجزء الثاني من المبرهنة بوضع $f_1(x) = h'_1(x)$ ، $f_2(x) = h_2'(x)$

لاحظ أن إشارة الطرح مثل إشارة الجمع في مثل هذه الحالات ولا داعي لبرهانها .

مثال

$$\int (7x+3)\,dx = \int 7x\,dx + \int 3\,dx = 7\int x\,dx + 3\int dx = 7\frac{x^2}{2} + 3x + c$$

لاحظ أننا استخدمنا ثابتاً واحداً للتكامل وذلك لأن مجموع الثابتين الناتجين من التكاملين أعلاه $c_1 + c_2 = c$ هو أيضا ثابت .

مثال

$$\int \left(x^{\frac{1}{2}} + 4\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int 4\,dx \qquad = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$

مثال

$$\int(4e^x + x)dx = 4e^x + \frac{x^2}{2} + c$$

مثال

$$\int\left(\frac{3}{x} + 2x^3\right)dx = 3\ln|x| + \frac{2x^4}{4} + c$$

مثال

$$\int(x^{-1} + x^{-2})dx = \int\frac{1}{x}\,dx + \int x^{-2}\,dx \quad = \quad \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

تمارين

أوجد التكاملات التالية :

1. $\int 6\,dx$
2. $\int x^3\,dx$
3. $\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$
4. $\int x^{-2}\,dx$
5. $\int x^{-4}dx$
6. $\int e^{2x}\,dx$
7. $\int (3x^2 + 5x^3 - 8)dx$
8. $\int (4x^{-1} - 5x^{-2} + 7)\,dx$
9. $\int (3e^x + 2x^2 - 5x^{-1})dx$
10. $\int\frac{x^6 + 2x^2 + 1}{x^2}\,dx$
11. $\int\frac{1}{x}\left\{x^2 - x + x^{\frac{1}{3}}\right\}dx$
12. $\int (x-2)(x-3)\,dx$
13. $\int\frac{x^2 - 1}{x - 1}\,dx$

2 – 5 مفهوم التكامل المحدود

نعلم أنه إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق بحيث ان $f(x) = g'(x)$ فإن

$\int g'(x)\,dx = g(x) + c$ أي أن $\int f(x)\,dx = g(x) + c$

تسمى g دالة بدائية للدالة f ، أي أن الدالة البدائية هو التكامل غير المحدود.

يعرف التكامل المحدود للدالة f على الفترة $[a,b]$ ويرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ على أنه

$g(b) - g(a)$ أي أنه إذا كانت g دالة بدائية للدالة f فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

وتسمى a و b حدود التكامل، أي أن حساب التكامل المحدود يتم على مرحلتين ، في الأولى منهما يتم إيجاد الدالة البدائية g (أي التكامل غير المحدود) ، وفي المرحلة الثانية يتم حساب الفرق $g(b)-g(a)$ والأمثلة التالية توضح ذلك :

مثال

احسب $\int_0^1 x^3\,dx$

الحل :

لاحظ أن $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$

أي أن الدالة البدائية $g(x) = \frac{x^4}{4}$ وعليه فإن :

$$\int_0^1 x^3\,dx = g(1) - g(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

سنتفق على أن نكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

مثال

احسب $\int_1^3 e^x\,dx$

الحل :

$$\int_1^3 e^x\,dx = e^x\Big|_1^3 = e^3 - e$$

مثال

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2 - 5x^3 + 7\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{4} + 7x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + 7\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{4} - 7\right)$$

مثال

$$\int_2^7 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_2^7 = \ln 7 - \ln 2$$

تمارين

احسب التكاملات التالية :

1. $\int_{-2}^{5} 3\,dx$
2. $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$
3. $\int_{-1}^{1} x^4\,dx$
4. $\int_{1}^{7} \frac{1}{x}\,dx$
5. $\int_{-7}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$
6. $\int_{0}^{3} e^x\,dx$
7. $\int_{0}^{1} (3x^5 + x^2 - 2x + 7)\,dx$
8. $\int_{1}^{2} (x^{-1} - 3x^{-2})\,dx$
9. $\int_{1}^{4} \frac{x^2 + 5x + 6}{2x}\,dx$
10. $\int_{-3}^{1} (x-1)(x+3)\,dx$
11. $\int_{-3}^{3} (x^2 + 5x)\,dx$

3 - 5 التكامل بالتعويض

نواجه في بعض الحالات تكاملات على الصورة $\int (f(x))^n g(x)\,dx$

حيث أن n عدد حقيقي ، فكيف يمكن إيجاد مثل هذه التكاملات ؟

لنفــــرض أن $y = f(x)$ فإن تفاضلة y هي $dy = f'(x)\,dx$ فإذا حدث وأن كانت

$g(x) = a f'(x)$ حيث a ثابت فإن :

$$\int (f(x))^n\, g(x)\,dx = a\int y^n\,dy$$

$$= \begin{cases} a\dfrac{y^{n+1}}{n+1} + c & , n \neq -1 \\ a\ln|y| + c & , n = 1 \end{cases}$$

يسمى هذا الأسلوب: **طريقة التكامل بالتعويض** . لاحظ إننا حولنا المسألة الى صورة مألوفة، ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ الأمثلة التالية :

مثال

أوجد $\int (x+1)^5\,dx$

الحل :

ضع : $y = x+1$ ومنها $dy = dx$ إذن :

$$\int (x+1)^5\,dx = \int y^5\,dy \qquad = \frac{y^6}{6} + c \qquad = \frac{(x+1)^6}{6} + c$$

لاحظ ضرورة أن يعطى الجواب النهائي بدلالة الرموز الأصلية وهي هنا x .

مثال

احسب $\int x\,(x^2+1)^3\,dx$

الحل :

ضع $y = x^2 + 1$ ومنها $dy = 2x\,dx$ إذن :

$$\int x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int y^3\,dy \quad = \frac{1}{2}\frac{y^4}{4} + c \quad = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$$

مثال

احسب $\int \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx$

الحل :

ضع $y = 3x + 2$ ومنها $dy = 3\,dx$ إذن :

$$\int \frac{1}{(3x+2)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int y^{-2}\,dy \quad = \frac{1}{3}\frac{y^{-1}}{-1} + c \quad = -\frac{1}{3}\frac{1}{3x+2} + c$$

مثال

احسب $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$

الحل :

ضع $y = x^2 + 3$ ومنها $dy = 2x\,dx$ إذن :

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy \quad = \frac{1}{2}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

* لاحظ أن الهدف من التكامل بالتعويض هو أن نحول المسألة إلى إحدى الصور المألوفة ولتوضيح ذلك نأخذ الأمثلة التالية :

مثال

أحسب $\int e^{5x}\,dx$

الحل :

ضع $y = 5x$ ومنها $dy = 5dx$ إذن :

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^{y}\,dy \quad = \frac{1}{5}e^{y} + c \quad = \frac{1}{5}e^{5x} + c$$

مثال

أحسب $\int 3x\, e^{-5x^2}\, dx$

الحل :

ضع $y = -5x^2$ ومنها $dy = -10x\, dx$ إذن :

$$\int 3x\, e^{-5x^2}\, dx = \int \frac{3}{-10} e^{y}\, dy = -\frac{3}{10} e^{y} + c = -\frac{3}{10} e^{-5x^2} + c$$

مثال

احسب $\int \frac{5x}{x^2+1} dx$

الحل :

ضع $y = x^2 + 1$ ومنها $dy = 2x\, dx$ إذن :

$$\int \frac{5x}{x^2+1} dx = \frac{5}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{5}{2} \ln |y| + c = \frac{5}{2} \ln \left| x^2 + 1 \right| + c = \frac{5}{2} \ln \left(x^2 + 1 \right) + c$$

مثال

احسب $\int \frac{7x^3}{2x^4+1} dx$

الحل :

افرض أن $y = 2x^4 + 1$ ومنها $dy = 8x^3\, dx$ إذن :

$$\int \frac{7x^3}{2x^4+1} dx = \frac{7}{8} \int \frac{1}{y}\, dy = \frac{7}{8} \ln |y| + c = \frac{7}{8} \ln (2x^4 + 1) + c$$

* الآن سنتناول حساب بعض التكاملات المحدودة باستخدام طريقة التعويض، ومن الجدير بالملاحظة هنا أنه من الضروري تغيير حدود التكامل بما يتفق والرموز المستخدمة . ولتوضيح ذلك نأخذ الأمثلة التالية .

مثال

احسب $\int_1^2 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x}} dx$

الحل :

ضع $y = x^3 + 2x$ ومنها $dy = (3x^2 + 2)dx$ ، لاحظ أنه عندما $x = 1$ (الحد الأول في التكامل) تكون $y = 3$ ، وعندما $x = 2$ (الحد الأعلى للتكامل) تكون $y = 12$ ولهذا فإن :

$$\int_1^2 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x}}\,dx = \int_3^{12} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int_3^{12} y^{-\frac{1}{2}}dy = 2y^{\frac{1}{2}}\Big|_3^{12} = 2(\sqrt{12} - \sqrt{5})$$

تمارين

احسب التكاملات التالية

1. $\int x^2 (3x^3 + 5)^7\, dx$
2. $\int e^{-7x}\, dx$
3. $\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx$
4. $\int x^3 \sqrt{x^4+7}\, dx$
5. $\int_1^3 \frac{x^2}{(x^3+10)^8}\,dx$
6. $\int_{-2}^{2} x(3x^2+5)^6\, dx$
7. $\int_1^4 \frac{1}{(x+5)^3}\,dx$
8. $\int_0^2 x(1-4x^2)^3\,dx$
9. $\int_0^1 x e^{\frac{x^2}{7}}\, dx$
10. $\int_{-1}^{1} x e^{-x^2}\,dx$

4 - 5 التكامل بالأجزاء

نعلم أن $(f(x)\,.\,g(x))' = f(x)\,.\,g'(x) + g(x)\,.\,f'(x)$ ومنها فإن :

$$f(x)\,.\,g'(x) = (f(x)\,.\,g(x))' - g(x)\,.\,f'(x)$$

وبتكامل الطرفيين نجد أن :

$$\int f(x)\,.\,g'(x)\,dx = \int (f(x)\,.\,g(x))'\,dx - \int g(x)\,.\,f'(x)\,dx$$
$$= f(x)\,.\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

لاحظ أن هذا الأسلوب يحول التكامل من صيغة الى صيغة أخرى ويكون ناجحاً إذا كانت الصيغة الجديدة من الصيغ المألوفة ، ويسمى هذا الأسلوب بطريقة التكامل بالأجزاء .

ولتوضيح هذه الطريقة ، نأخذ الأمثلة التالية .

مثال

احسب $\int x(x+1)^9\, dx$

الحل :

ضع $f(x) = x \quad ، \quad g'(x) = (x+1)^9$

لاحظ أننا عرفنا f بالدالة الأسرع في التحول الى ثابت بعد الاشتقاق ، ومن القاعدة :

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) \,.\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx$$

نجد أن :

$$\int x(x+1)^9\, dx = x\frac{(x+1)^{10}}{10} - \int \frac{(x+1)^{10}}{10}\, dx$$

$$= \frac{x(x+1)^{10}}{10} - \frac{(x+1)^{11}}{10 \times 11} + c$$

مثال

احسب $\int 5x\sqrt{x+3}\, dx$

الحل :

ضع $g'(x) = \sqrt{x+3} \quad ، \quad f(x) = 5x$ ولهذا فإن :

$$\int 5x\sqrt{x+3}\, dx = 5x.\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3/2} - \int \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3/2}.5dx$$

$$= \frac{10}{3} x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{3}\, \frac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{5/2} + c$$

مثال

أحسب $\int x e^x\, dx$

الحل :

ضع $g'(x) = e^x \quad ، \quad f(x) = x$ ولهذا فإن :

$$\int x e^x\, dx = x.e^x - \int e^x\, dx = x.e^x - e^x + c$$

مثال

احسب $\int \ln x\, dx$

الحل :

ضع $g'(x) = 1 \quad ، \quad f(x) = \ln x$ ولهذا فإن :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \quad = x \ln x - x + c$$

تمارين

احسب التكاملات التالية :

1. $\int x e^{-x} \, dx$
2. $\int x^2 e^x \, dx$
3. $\int x (x+1)^{10} \, dx$
4. $\int \ln \sqrt{x} \, dx$
5. $\int 3x (1-x)^7 \, dx$
6. $\int (2x+1) e^{-3x} \, dx$
7. $\int x^3 \ln x \, dx$
8. $\int 7x \sqrt{18+x} \, dx$
9. $\int_0^1 x e^{7x} \, dx$
10. $\int_0^1 x^2 e^{-3x} \, dx$
11. $\int_{-1}^1 3x \, e^{-3x} \, dx$
12. $\int_1^2 \ln x^{100} \, dx$
13. $\int \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$
14. $\int x (x+8)^9 \, dx$
15. $\int 7x \sqrt{x+4} \, dx$
16. $\int x \sqrt{7x+4} \, dx$
17. $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{2x+1}} \, dx$
18. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$
19. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$
20. $\int \ln (x+1) \, dx$
21. $\int (\ln x)^2 \, dx$

5 - 5 التكامل بالكسور الجزئية

إذا كانت $f_1(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وكانت $f_2(x)$ كثيرة حدود من الدرجة m فإن الكسر $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ تمثل قاعدة الدالة النسبية (أو الدالة الكسرية) . وقد يتطلب منا أن نجد $\int dx \; \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ فكيف يمكن حساب ذلك ؟

سنتناول في هذا الكتاب بعض الحالات الممكنة والتي تناسب مستوى هذا الكتاب ، وهذه الحالات هي :

الحالة الأولى : وهي الحالة التي يتحلل فيه $f_2(x)$ إلى حاصل ضرب كثيرات حدود مختلفة من الدرجة الأولى ، وتكون درجة f_1 اقل من f_2 ، أي أن :

$$f_2(x)=A\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$$

حيث A ثابت وكذلك لكل i يكون a_i ثابتاً .

ويمثل الرمز $\prod_{i=1}^{m}$ عملية الضرب ، أي أن :

$$\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$$

وسوف نوضح الآن كيفية إيجاد $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$ في مثل هذه الحالة إذا كانت الدالة المطلوب إيجاد تكاملها على الصورة $\frac{f_1(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)}$ حيث a_i ثابت لكل $i=1,\ldots,m$ وكانت $f_1(x)$ كثيرة حدود درجتها اقل من m فإنه بالإمكان إيجاد الثوابت b_i بحيث أن :

$$\frac{f_1(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{x-a_i}$$

و يكون :

$$\int\frac{f_1(x)}{\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)}dx=\sum_{i=1}^{m}b_i\ln|x-a_i|+c$$

ولتوضيح ذلك نأخذ الأمثلة التالية:

مثال

احسب $\int\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}$

الحل :

لاحظ أن درجة البسط 1 بينما درجة المقام 2 .

ضع $\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2}{x+2}$ ولإيجاد قيم b_1 , b_2 نعيد جمع الطرف الأيمن فنجد أن :

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{b_1(x+2)+b_2(x-1)}{(x-1)(x+2)}\quad\forall\ x$$

ولهذا فإن البسوط متساوية لكل x ، أي أن:

$$3x+5 = (b_1 + b_2)x + (2b_1 - b_2) \qquad \forall\ x$$

ولهذا يجب ان تكون المعاملات المتناظرة متساوية أي أن :

$$3 = b_1 + b_2$$

$$5 = 2b_1 - b_2$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $b_2 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{8}{3}$ ولهذا فإن :

$$\int \frac{3x+5}{(x-1)(x+2)} = \int \left(\frac{8}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \frac{8}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$$

مثال

احسب $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

الحل :

لاحظ أن درجة البسط 0 ودرجة المقام 2 ضع

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{b_1}{x-1} + \frac{b_2}{x+1} \qquad \forall\ x$$

ولإيجاد b_2 ،b_1 اعد جمع الطرف الأيمن لتجد أن :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{b_1(x+1) + b_2(x-1)}{x^2-1} \qquad \forall\ x$$

وبوضع البسطين متساويين نجد أن :

$$1 = (b_1 + b_2)x + (b_1 - b_2)\ , \forall\ x$$

وبمقارنة المعاملات المتناظرة نجد أن :

$$0 = b_1 + b_2$$

$$1 = b_1 - b_2$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن : $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{2}$

ولهذا فإن $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

الحالة الثانية: وهي مماثلة للحالة الأولى مع فارق واحد وهو كون درجة f_1 أكبر من أو تساوي درجة f_2 . في مثل هذه الحالة نقسم $f_1(x)$ على $f_2(x)$ قسمة طويلة ونجد ناتج القسمة وليكن $f_3(x)$ وباقي القسمة وليكن $f_4(x)$. لاحظ ان درجة الباقي $f_4(x)$ اقل من درجة المقسوم عليه $f_2(x)$ ثم نكتب الكسر $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ على الصيغة التالية :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_3(x) + \frac{f_4(x)}{f_2(x)}$$

ولهذا يكون

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = \int f_3(x) dx + \int \frac{f_4(x)}{f_2(x)} dx$$

لاحظ أن $f_3(x)$ كثير حدود ولا إشكال في تكامله، وأن درجة $f_4(x)$ اقل من درجة $f_2(x)$ وان $f_2(x)$ تتحل إلى عوامل من الدرجة الأولى بالفرض ، لهذا نستخدم نفس الأسلوب الوارد في الحالة الأولى ، ولتوضيح هذا الأسلوب نأخذ الأمثلة التالية .

مثال

احسب $\int \frac{x+7}{x-1} dx$

بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ x-1 & \quad x + 7 \\ & \mp x \pm 1 \\ \hline & \quad\quad 8 \end{array}$$

ولهذا فإن الناتج 1 والباقي 8 وبناء على ذلك يكون :

$$\frac{x+7}{x-1} = 1 + \frac{8}{x-1}$$

وبتكامل الطرفين نجد أن

$$\int \frac{x+7}{x-1} = \int (1 + \frac{8}{x-1}) dx$$

$$= x + 8 \ln |x-1| + C$$

مثال

احسب $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}{x+2} dx$

الحل :

بما أن درجة البسط 3 أكبر من درجة المقام 1 ، نقسم البسط على المقام قسمة طويلة كما يلي:

$$\begin{array}{r|l} & x^2-5x+17 \\ \hline x+2 & x^3-3x^2+7x-5 \\ & \mp x^3 \mp 2x^2 \\ \hline & -5x^2+7x-5 \\ & \pm 5x^2 \pm 10x \\ & 17x \quad -5 \\ & \mp 17x \mp 34 \\ \hline & -39 \end{array}$$

فيكون ناتج القسمة $x^2-5x+17$ والباقي 39- ، ولهذا فإن .

$$\frac{x^3-3x^2+7x-5}{x+2}=x^2-5x+17+\frac{-39}{x+2}$$

ومنها :

$$\int\frac{x^3-3x^2+7x-5}{x+2}\,dx=\int x^2-5x+17-\frac{39}{x+2}\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+17x-39\ln|x+2|+c$$

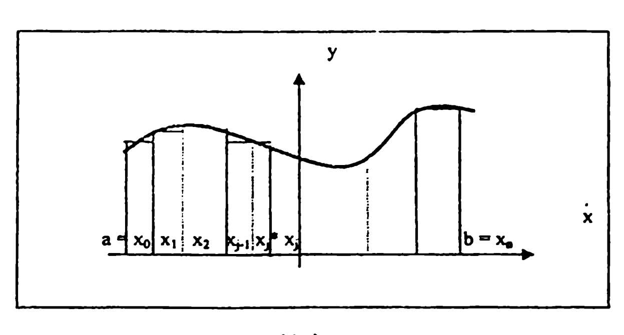
تمارين

احسب التكاملات التالية

1. $\int\frac{3x+5}{9-x^2}dx$
2. $\int\frac{5}{9-x^2}\,dx$
3. $\int\frac{x^3+2x^2+5}{x^2-4}\,dx$
4. $\int\frac{1}{x(x+1)}\,dx$
5. $\int\frac{3x-7}{x^2-2x-3}\,dx$
6. $\int\frac{2x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$
7. $\int\frac{3x-2}{(x+1)(2-5x)}\,dx$
8. $\int\frac{7}{(1+4x)(5x-1)}\,dx$
9. $\int\frac{2x^2+3x+6}{x(x^2-9)}\,dx$
10. $\int\frac{3x^2-8x+7}{x(x-1)(x+5)}\,dx$

5 - 6 تطبيقات التكامل على المساحات

يمكن ملاحظة أن مجموع ريمان يمثل تقريباً للمساحة تحت منحني الدالـة وفـوق المحور ox وبين الخطين $x = a$ ، $x = b$ وذلك عندما يكون $f(x) \geq 0$ ، وذلك لأن هذا المجمـــوع يســاوي مجموع مساحات مستطيلات أطوال قواعـــدها $\frac{b-a}{n}$ وارتفاعاتهــا $f(x_i^*)$ حيث x_i^* نقطة داخل الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$.



الشكل (1)

ولما كان التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هو غاية مجموع ريمان عنـدما $n \to \infty$

فإن ذلك يبرر لنا صياغة المبرهنة التالية :

مبرهنة 5 - 6 – 1

إذا كانت f دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ بمعنى ان $\int_a^b f(x)dx$ موجود،

فإن المساحة A للمنطقة المحصورة بين منحنى الدالة f والمحور ox والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ تعطى بإحدى العلاقات التالية :

أ . $A = \int_a^b f(x)dx$ وذلك بشرط ان تكون $f(x) \geq 0$ لكل $a \leq x \leq b$

ب . $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ وذلك بشرط ان تكون $f(x) \leq 0$ لكل $a \leq x \leq b$

والأمثلة التالية توضح ذلك .

مثال

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ والمستقيمين $x = -1$ ، $x = 2$ والمحور ox .

الحل :

لاحظ أن $f(x) = x^2 \geq 0$ لكل x ، إذن المساحة المطلوبة تساوي :

$$A = \int_{-1}^{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$ (وحدة مربعة)

مثال

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = -x^2$ والمستقيمين $x = 1$ ، $x = -1$ والمحور ox .

الحل :

لاحظ أن $f(x) = -x^2 \leq 0$ لكل x ، إذن المساحة المطلوبة تساوي :

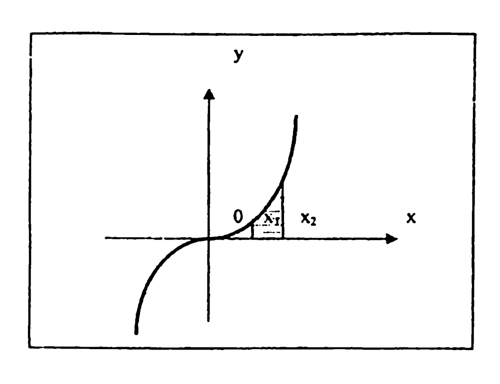
$$A = \left|\int_{-1}^{1} -x^2\, dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right| = \frac{1}{3}(1-(-1)) = \frac{2}{3}$$ (وحدة مربعة)

والسؤال الذي ينشأ الآن هو : ماذا نفعل إذا كان الدالة سالبة في مجموعة جزئية (أو أكثر) من المجال وموجبا في مجموعة جزئية أخرى ؟

وتكمن الإجابة عن هذا السؤال في أن نحسب المساحة في كل جزء على انفراد مستفيدين من المبرهنة (5 – 6 – 1)، ثم نجمع المساحات ، والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^3$ والمستقيمين $x = 1$، $x = 2$ والمحور ox .



الشكل (2)

الحل :

ضع $f(x) = x^3 = 0$ لتجد أن $x = 0$ ولاحظ انه إذا كانت $-2 \le x \le 0$ فإن $f(x) = x^3 \le 0$ بينما إذا كانت $0 \le x \le 1$ فإن $f(x) = x^3 \ge 0$ ، ولهذا فـــإن مساحة المنطقة المطلوبة تساوي مجموع مساحتي منطقتين، أي أن :

$$A = A_1 + A_2$$

حيث $A_1 = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right|$ و $A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

ولهذا فإن :

$$A = \left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_{0}^{1} x^3\,dx$$

$$= \left|\frac{1}{4}\left\{\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right\}\right| + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \left|\frac{1}{4}\left\{0 - \frac{16}{4}\right\}\right| + \left\{\frac{1}{4} - 0\right\} = 1 + \frac{1}{4} = 1.25$$

وحتى ننهي هذا الموضوع يتبقى لن نسأل ؛ كيف يمكن حساب مساحة المنطقة المغلقة بين منحنيي دالتين ؟ والمبرهنة التالية تعطي الإجابة عن هذا السؤال .

مبرهنة 5 - 6 – 2

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الـدالتين f و g والمســتقيمين

$x = a$ ، $x = b$ هي $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ بشرط أن $f(x) \geq g(x)$ لكل $a \leq x \leq b$

والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال

احسب مساحة المنطقــة المحصــورة بــين $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x^2 + 5$

والمستقيمين $x = 2$ ، $x = 1$.

الحل :

لاحظ ان $g(x) \geq f(x)$ لكل $1 \leq x \leq 2$ لهذا فإن مساحة المنطقة المطلوبــة

تساوي :

$$A = \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_1^2 \{(x^2 + 5) - (x^2 + 1)\}\,dx = \int_1^2 4\,dx = 4$$

مثال

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x) = x^2 + 3x + 5$ و $g(x) = -2x - 1$

الحل :

أ . نوجد أولا نقط تقاطع المنحنيين ، وذلك بوضع $f(x) = g(x)$ لنجد أن :

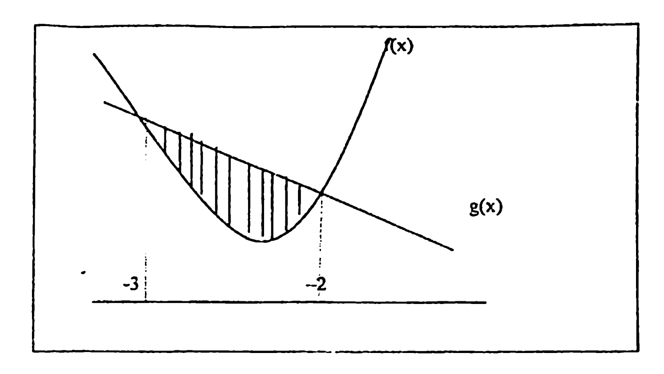
$x^2 + 3x + 5 = -2x - 1$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 3)(x + 2) = 0$

إذن $x = -2$, $x = -3$

ب . نرسم المنحنيين كما في الشكل (3)



الشكل (3)

جـ . لاحظ من الرسم أنه لكل $-3 \le x \le -2$ يكون $g(x) \ge f(x)$ ، لهذا فإن المساحة المطلوبة تساوي :

$$\int_{-3}^{-2}(g(x)-f(x))\,dx = \int_{-3}^{-2}\{(-2x-1)-(x^2+3x+5)\}\,dx = \int_{-3}^{-2}(-x^2-5x-6)\,dx$$

$$= -\left\{\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+6x\right\}_{-3}^{-2} = -\left\{(-\frac{8}{3}+10-12)-(-\frac{27}{3}+\frac{45}{2}-18)\right\}$$

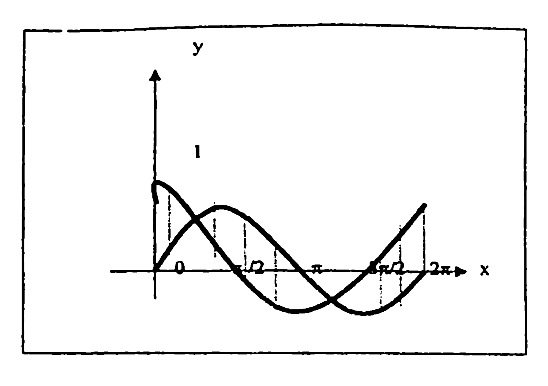
$$= \frac{8}{3}+2-27+\frac{45}{2} = 0.17$$

ملاحظة 5 – 6 – 3

إذا تقاطع منحنيا الدالتين f و g في أكثر من نقطتين يجب تجزئة المنطقة الى عدة مناطق وتحسب مساحة كل منطقة على انفراد ثم تجمع المساحات .

مثال

ليكن $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ أوجد المساحة A الواقعة بين منحنيي الدالتين f و g على الفترة $[0, 2\pi]$ كما في الشكل (4) التالي :



الشكل (4)

الحل :

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\, dx$$

ولحساب هذا التكامل يجب أن نعرف متى يكون $\sin x - \cos x \geq 0$ ومتى يكون $\sin x - \cos x \leq 0$ يمكن التحقق من أن $\sin x \geq \cos x$ على الفترة $[\pi/4 , 5\pi/4]$ بينما $\cos x \geq \sin x$ على الفترات $[0, \pi/4]$ و $[5\pi/4 , 2\pi]$ ولذلك فإن :

$$A = \int_0^{\pi/4} |\sin x - \cos x|\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} |\sin x - \cos x|\, dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} |\sin x - \cos x|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= 4\sqrt{2}$$

تمارين

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الدوال المعطاة في كل من الحالات التالية:

1. $f(x) = x^3$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$
2. $f(x) = x - 1$, $x = 2$, $y = 4$, $y = 0$
3. $f(x) = x^2 - 4$, $x = 3$, $x = 4$, $y = 0$
4. $f(x) = x$, $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$
5. $f(x) = e^x$, $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$

6. $f(x) = \ln(x)$, $x=1$, $x=5$, $y=0$

7. $f(x) = x^2 + x - 2$, $y = 0$

8. $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$, $y=0$

9. $f(x) = x^2$, $g(x) = 9$

10. $f(x) = x^2$, $g(x) = 9 - x^2$

11. $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x$

12. $f(x) = x^3$, $g(x) = x$

5 - 7 تطبيقات اقتصادية على التكامل

يمكن تكوين نماذج لبعض المسائل الاقتصادية بالاستفادة من التكامل ونذكر من هذه النماذج ما يلي :

5- 7 - 1 الدخل الكلي (الإجمالي)

إذا كان $f(t)$ معدل الدخل عند الزمن t بالدينار فإن إجمالي الدخل I خلال فترة زمنية طولها t_0 يعطى بالتكامل

$$I = \int_0^{t_0} f(t)\,dt$$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال

إذا كان معدل الدخل بالدينار الناتج عن الرسوم التي يدفعها الطلبة هو :

$$f(t) = 12000\,(1 + t)^{-\frac{1}{2}}$$

حيث t الزمن بالسنوات ، فاحسب الدخل الكلي المتوقع من الرسوم خلال 8 سنوات .

الحل :

لدينا هنا $t_0 = 8$ ولذلك فإن :

$$I = \int_0^8 f(t)\,dt = \int_0^8 12000(1+t)^{-1/2}\,dt = 12000\,\frac{(1+t)^{1/2}}{1/2}\Big|_0^8 = 24000\{\sqrt{9} - \sqrt{1}\} = 48000$$

(ديناراً)

القيمة الرأسمالية 5 – 7 – 2

من المعلوم أن دينار اليوم يصبح e^{rt} دينارا في t من السنوات بفائدة مركبة متواصلة قدرها r وذلك لأن :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{rt}$$

وإذا كان $f(t)$ معدل الدخل فإن القيمة الحالية لهذا الدخل على فترة زمنية طولها t_0 تعطى بالتكامل $\int_0^{t_0} f(t).e^{-rt}\,dt$ ويسمى هذا المقدار **القيمة الرأسمالية**.

مثال

إذا أخذنا دخلا ثابتا مقداره 90 دينارا في الشهر لفترة 5 سنوات ، فما القيمة الرأسمالية لهذا الدخل إذا كانت الفائدة % 6 ؟

الحل :

طول الفترة الزمنية $t_0 = 5$ ، معدل الدخل السنوي $f(t) = 90 \times 12$

نسبة الفائدة $r = 0.06$. إذن القيمة الرأسمالية تساوي :

$$\int_0^{t_0} f(t)e^{-rt}\,dt = \int_0^{5} 90\times 12\, e^{-0.06t}\,dt = 90\times 12\,\frac{e^{-0.06t}}{-0.06}\Big|_0^5 = -\frac{1080}{0.06}[e^{-0.30}-1]$$

(دينارا) .

التحليل الحدي في حساب الدخل الكلي 5– 7 – 3

من المعلوم انه إذا كان T الدخل الكلي الناتج عن بيع x من الوحدات فإن الدخل الحدي يساوي $\frac{dT}{dx}$.

والسؤال الذي ينشأ هنا هو : كيف يمكن حساب الدخل الكلي T إذا علم الدخل الحدي $\frac{dT}{dx}$ ؟

من الواضح أن $T = \int \frac{dT}{dx}\,dx$.

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال

إذا كان الدخل الحدي بالنسبة لمبيعات سيارات تيوتا معطاة بالمعادلة :

$$\frac{dT}{dx} = 50x^2 + 30x + 400$$

فأوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 10 سيارات .

الحل :

إن الدخل الكلي هو :

$$T = \int \frac{dT}{dx}\, dx = \int (50x^2 + 30x + 400)\, dx = \frac{50}{3}x^3 + \frac{30}{2}x^2 + 400x + c$$

هذا ؛ ويمكن إيجاد قيمة الثابت c باستخدام الشرط المنطقي الابتدائي القائل عندما $x = 0$ تكون $T = 0$ لأنه لا يكون هنالك دخل إذا لم تكن هنالك مبيعات.

لهذا فإن $c = 0$ وبالتالي :

$$T = \frac{50}{3}x^3 + 15x^2 + 400x$$

وإذا كان عدد السيارات المباعة $x = 10$ فإن الدخل الكلي T يكون :

$$T = \frac{50}{3}(1000) + 15(100) + 400(10) = \frac{50000}{3} + 1600 + 4000$$

$= 22166.7$ (ديناراً)

التحليل الحدي في حساب تكلفة الإنتاج 5 – 7 – 4

إذا كانت $y = f(x)$ تمثل تكلفة إنتاج x وحدة من بضاعة فإن $\frac{dy}{dx}$ تمثل حد التكلفة لإنتاج أحد الأنواع .

والسؤال الذي ينشأ هنا هو : كيف يمكن إيجاد تكلفة الإنتاج y إذا علم حد التكلفة $\frac{dy}{dx}$ ؟

من الواضح أن $y = \int \frac{dy}{dx}\, dx$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال

إذا كان حد التكلفة لإنتاج تنكة زيت الزيتون وزن 15 كغم هو

$$\frac{dy}{dx} = 2 + x + \frac{1}{x+1}$$

فما هي تكلفة إنتاج تنكة زيت زيتون واحدة إذا كانت هنالك مصاريف إضافية قدرها 10 دنانير (أي عندما $x = 0$ تكون $y = 10$)

الحل :

إن تكلفة الإنتاج :

$$y = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int \left(2 + x + \frac{1}{x+1}\right) dx = 2x + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + c$$

ولإيجاد الثابت c نستخدم الشرط الابتدائي القائل بأنه عندما $x = 0$ فإن $y = 10$ نجد إن

$$10 = 0 + 0 + 0 + c$$

أي أن $c = 10$ ، إذن $y = 2x + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + 10$

وعند إنتاج نتكة واحدة أي عندما $x = 1$ تكون التكلفة هي:

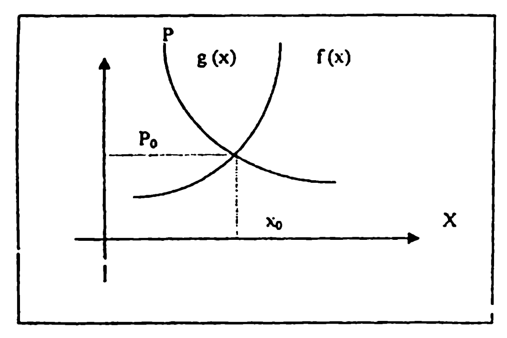
$$y = 2 + \frac{1}{2} + \ln(2) + 10 = 12.5 + \ln(2) \quad (\text{دينارا})$$

فائض المستهلك وفائض المنتج 5-7-5

عند دراسة العلاقة بين السعر P والكمية x يجب التمييز بين الكمية المطلوبة ، والكمية التي يزود بها السوق . ومن المعلوم من الناحية الاقتصادية ان كمية الطلب x تتناسب عكسيا مع P ، وسوف نرمز لهذه العلاقة بالرمز $P = g(x)$ ، وكذلك فإن السعر يتناسب طردياً مع الكمية التي يزود بها السوق .

إن الدالة الذي يربط السعر P مع الكمية التي يزود بها السوق x والذي يرمز له بالرمز $P = f(x)$ ويسمى دالة السعر - التزويد ، واختصاراً **دالة الإنتاج** (أي العرض أو التزويد).

والسعر P_0 الذي تكون عنده $g(x_0) = f(x_0)$ يسمى سعر التعادل ، كما تسمى x_0 كمية التعادل بين العرض والطلب ؛ انظر الشكل (5) .



ومن الجدير بالملاحظة هنا انه إذا تم تثبيت السعر عند P_0 فإنه :

أولا : لكل $x < x_0$ يكون التوفير في السعر للمستهلك $g(x) - P_0$ ، ولهذا نعرف **الفائض بالنسبة للمستهلك** على أنه :

$$\int_0^{x_0} (g(x) - P_0)\,dx = \int_0^{x_0} g(x)\,dx - P_0 x_0$$

ثانيا : لكل $x < x_0$ يكون المكسب (الفائض) في السعر بالنسبة للمنتج هـو $P_0 - f(x)$ ،
ولهذا فإننا نعرف أجمالي **مكسب المنتج (فائض المنتج)** على إنه :

$$\int_0^{x_0} (P_0 - f(x))\, dx = P_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\, dx$$

ولتوضيح هذه الأمور نأخذ الأمثلة التالية:

مثال

نفرض أن دالة الطلب $P = g(x) = 50 - \frac{1}{2} x$ وان السعر ثابت على $P_0 = 40$

أوجد الفائض بالنسبة للمستهلك .

الحل :

لاحظ أن كمية الطلب عند هذا السعر $P_0 = 40$ هي حل المعادلة $40 = 50 - \frac{1}{2} x$

أي أن $x_0 = 20$ وعندها يكون الفائض بالنسبة للمستهلك :

$$\int_0^{x_0} g(x)\,dx - P_0 x_0 = \int_0^{20} (50 - \frac{1}{2})\, dx - 40 \times 20$$

$$= 50 \times 20 - \frac{1}{4} (20)^2 - 40 \times 20 = 100$$

مثال

افرض أن دالة الإنتاج $f(x) = 20 + 5x^2$ وأن السعر قد تم تثبيته عند $P_0 = 25$

لحسب فائض المنتج .

الحل :

لاحظ أن الكمية x_0 عند هذا السعر الثابت $P_0 = 25$ هي حل المعادلة

$$25 = 20 + 5x^2$$

وهي هنا $x_0 = 1$ (لاحظ أننا أهملنا الحد السالب) وبالتالي فإن فائض المنتج هو :

$$P_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,dx = (25)(1) - \int_0^{1} (20 + 5x^2)\,dx = 25 - (20 + \frac{5}{3}) = \frac{10}{3}$$

النمو الطبيعي 5 – 7 – 6

تزداد المجتمعات بنسب غير معلومة (أو تقريبية) فإذا كان حجم مجتمع ما v فـــإن معدل نموه مع الزمن t هو $\frac{dv}{dt}$.

والسؤال الذي ينشأ هنا هو: كيف يمكن إيجاد v إذا علم $\frac{dv}{dt}$ ؟ ولتوضيح هذا النـــوع من التطبيقات نأخذ المثال التالي :

مثال

إذا فرضنا أن عدد سكان الكرة الأرضية 3 بليون نسمة عـــام 1968 وان معـــدل النمو هو 2% سنوياً . متى يصبح عدد سكان الكرة الأرضية 30 بليون نسمة ؟

الحل :

لنفرض أن العام 1968 يسمى لحظة بدء القياس أي عند $t = 0$ فيكون v_0 عنـــدها 3 بليون نسمة ، لاحظ أن معدل النمو $\frac{dv}{dt} = 0.02\, v$

وهذه تسمى معادلة تفاضلية والمطلوب حلها لإيجاد v وبعد ذلك نجد الزمن المطلوب.

لاحظ ان المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن إعادة كتابتها على الصورة :

$$\frac{dv}{v} = 0.02\, dt$$

وبتكامل الطرفين نجد أن : $\int \frac{1}{v} dv = \int 0.02\, dt$ ، إذن $\ln v = 0.02\, t + c$

و لإيجاد قيمة الثابت c نستخدم الشرط الابتدائي القائل بأنه عندما $t = 0$ تكون $v = 3$

إذن $\ln 3 = c$ ومنها $\ln v = 0.02t + \ln 3$

والمطلوب هو إيجاد t عندما تكون $v = 30$ أي المطلوب حل المعادلة :

$$\ln 30 = 0.02\, t + \ln 3$$

والحل هو :

$$t = \frac{\ln 30 - \ln 3}{0.02}$$

$$= \frac{\ln 10}{0.02} = \frac{2.3026}{0.02} = 115.129$$

أي بعد حوالي 115 سنة من العام 1968 (أي في حوالي العام 2083) يصبح عدد سكان الكرة الأرضية 30 بليون نسمة .

تمارين

1 . احسب الدخل الكلي الناتج عن بيع أعداد المواد المذكورة إزاء كل حالة مما يلي علما بأن الدالة المعطى يمثل الدخل الحدي

أ . $\frac{dT}{dx} = 5x^2 - 3x + 4$ عدد المواد 10

ب . $\frac{dT}{dx} = 3x^2 + 4x - 7$ عدد المرات 10 .

2 . احسب تكلفة الإنتاج في كل من الحالات التالية ، حيث $\frac{dy}{dx}$ تمثل حد التكلفة

أ . $\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{1}{x+1}$ التكلفة الإضافية الثابتة 20 ، وعدد المواد 15

ب . $\frac{dy}{dx} = x^3 - 2x + 1$ التكلفة الإضافية الثابتة 50 ، وعدد المواد 10

3 . أوجد فائض المستهلك في كل من الحالات التالية حيث f دالة الطلب

أ . $f(x) = 9 - 2x^2$ عدد الوحدات 4

ب . $f(x) = 81 - 2x^3$ عدد الوحدات 5

جـ . $f(x) = 7 - x$ السعر 7

د . $f(x) = 60 - 3x^3$ السعر 8

4 . أوجد فائض المنتج في كل من الحالات التالية حيث g تمثل دالة العرض

أ . $g(x) = 5 + x^2$ عدد الوحدات 5

ب . $g(x) = 3x^2 + 6$ عدد الوحدات 7

5 . إذا فرضنا أن عدد سكان الكرة الأرضية 3 بليون نسمة عام 1968 ، وأن معدل النمو السكاني هو 2% سنويا

أ . احسب عدد سكان الكرة الأرضية عام 2000 .

ب . متى يصل عدد سكان الكرة الأرضية 20 بليون نسمة ؟

6. احسب التكاملات التالية :

1. $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$

2. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx$

3. $\int 3x^2 \ln x\,dx$

4. $\int (4-6x^2)\, e^{x^3-2x}\,dx$

5. $\int (x+2)\,(x^2-4x)^{-3}\,dx$

6. $\int x^{-3}\sqrt{1-x^{-2}}\,dx$

7. $\int \frac{x}{(x+1)^2(x-2)}\,dx$

8. $\int (1-e^{-3x})^2\,dx$

9. $\int \frac{1}{x\ln(x^2)}\,dx$

10. $\int \frac{(x-1)^{-2}}{x}\,dx$

11. $\int_1^e -\ln(x^{\frac{1}{2}})\,dx$

12. $\int t\,(2t-5)^8\,dt$

13. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

14. $\int x\sqrt{x-6}\,dx$

15. $\int x\ln(2x)\,dx$

16. $\int e^{x+e^x}\,dx$

17. $\int_{-1}^{0} x e^x\,dx$

18. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

قائمة المصطلحات

قائمة المصطلحات

الانكليزي	العربي
Absolute value	القيمة المطلقة
Acceleration	التسارع
Addition	الجمع
Algorithm	اللوغاريتم- خوارزم
Anti derivative	معكوس المشتقة
Approximation	التقريب
Arbitrary constant	ثابت اختياري
Area	مساحة
Artificial variable	متغير مصطنع
Asymptote	خط مقارب
horizontal	أفقي
vertical	عمودي
Average value of a function	معدل القيمة لدالة
Axis	محاور
Binary operation	عملية ثنائية
Binomial coefficient	عوامل ثنائي الحدود
Bound	حد
Greatest lower....	اكبر- حد أدنى
Least upper.....	اصغر حد أعلى
Lower.......	حد أدنى
Upper......	حد أعلى
Bounded interval	فترة محدودة
Bounded region	منطقة محدودة

Cartesian coordinates	الإحداثيات الديكارتية
Center	مركز
of mass	... الثقل
Chain rule	قاعدة السلسلة
Change of variable formula	قانون تبديل المتغير
Closed interval	فترة مغلقة
Composition of functions	تركيب الدالةات
Coefficients matrix	مصفوفة المعاملات
Conditional pay-off table	جدول الإيرادات المشروطة
Concave	محدب
Concavity	تحدب
Downward	نحو الاسفل
Upward	نحو الاعلى
Constant	ثابت
Continuity	استمرارية
of a function on an interval	دالة على فترة
from the left	من اليسار
from the right	من اليمين
Convex set	مجموعة محدبة
Convex function	دالة محدبة
Coordinate plane	مستوى الإحداثيات
Coordinates	الإحداثيات
Critical point	نقطة حرجة
Curve	منحنى
Definite integral	تكامل محدد
Derivative	مشتقة
of a constant function	دالة ثابتة
of an exponential function	دالة أسية

first order	من المرتبة الأولى
higher-order	من مراتب عليا
of an inverse function	دالة عكسية
of a logarithmic function	دالة لوغاريتمي
of the polynomial	حدودي
of a product	حاصل ضرب
of a quotient	حاصل قسمة
as a rate of change	كمعدل تغير
second	الثانية
of a sum	المجموع
Differentiability on an interval	التفاضل على فترة
Differential	تفاضل
Differentiation implicit	تفاضل ضمني
Distance	مسافة
Between two points in the plane	بين نقطتين في المستوي
Domain	مجال
Domain of solution	مجال الحل
Elasticity function	دالة المرونة
Equation	معادلة
Equivalent standard program	البرنامج القياسي المكافئ
Error	خطأ
Even function	دالة زوجية
Exponential function	دالة أسية
Natural	طبيعي
Extreme values	قيم قصوى
Factorial	مضروب (عاملي)

Feasible solution	حل مجد
Finite	منتهية
First derivative	مشتقة أولى
Function	دالة
Explicitly defined	معرفة بشكل واضح
Implicitly defined	معرفة بشكل ضمني
Graph	رسم
of an function	دالة
Graphical method	الطريقة البيانية
Hopital theorem	مبرهنة أوبيتال
Improper integral	تكامل معتل
Inconsistent	غير متسقة
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Independent variables	متغيرات مستقلة
Indeterminate	غير محدد
Index	دليل
Inequality	متباينة
Inflection	انعطاف
Integer	عدد صحيح
Integral	تكامل
Integration by substitution	التكامل بالتعويض
Integration by parts	التكامل بالأجزاء
Integration by partial fractions	التكامل بالكسور الجزئية
Intercept	التقاطع مع المحاور الإحداثية
Intermediate value theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
Interval	فترة
Invalid solution	حل غير مجد
Irrational number	عدد غير كسري

Law of exponents	قانون الأسس
Least upper bound	أصغر حد أعلى
Left derivative	المشتقة من اليسار
Leibniz notation	رموز ليبينز
Leibniz rule	قاعدة ليبينز
L Hopital rule	قاعدة لوبيتال
Limit	غاية
Infinite	غير منتهية
at infinity	عند اللانهاية
left- hand	من الجهة اليسرى
one-sided	من جانب واحد
of a polynomial	الحدودية
of a rational function	دالة كسرية
right hand	من الجهة اليمنى
theorems for	مبرهنات على الغاية
two –sided	الغاية من الجانبين
uniqueness	وحدانية الغاية
Line (s)	خطوط مستقيمة
parallel	متوازية
perpendicular	متعامدة
tangent	مماس
Line in the plane	الخط المستقيم في المستوي
equation	معادلة
Linear function	دالة خطية
Linear inequality	متباينة خطية
Logarithm	لوغاريتم
Natural	طبيعي

Main variable	المتغير الأساسي
Mean value theorem	مبرهنة القيمة المتوسطة
Method	طريقة
Minimum value	قيمة صغرى
Natural logarithm	لوغاريتم طبيعي
Natural numbers	أعداد طبيعية
New pivot equation	معادلة الركيزة الجديدة
Neighborhood	جوار
Objective	هدف
Odd function	دالة فردية
Open interval	فترة مفتوحة
Operation	عملية
Ordered pair	زوج مرتب
Origin	نقطة الاصل
Orthogonal	متعامدة
Parallel lines	خطوط مستقيمة متوازية
Parametric	معلمي (وسيطي)
Parametric equation	معادلة معلمية(وسيطية)
Periodic function	دالة دورية
Plane	مستوي
Point of inflection	نقطة انعطاف
Program	برنامج
Projection	إسقاط
Quotient	قسمة
Rate of change of a function	معدل تغير دالة
Rational function	دالة كسرية
Rational number	عدد كسري
Real line	الخط الحقيقي

Real numbers	الأعداد الحقيقية
Real-valued function	دالة نو قيمة حقيقية
Region	منطقة
Riemann integral	تكامل ريمان
Riemann sum	مجموع ريمان
Rolle's theorem	مبرهنة رول
Rotation of axes	دوران المحاور
Rule of a function	قاعدة الدالة
Scalar	قياسي
Second derivative	المشتقة الثانية
Set	مجموعة
Slop	ميل
of line	خط مستقيم
Substitution integration	التكامل بالتعويض
Sum	مجموع
Surface	سطح
Symmetry	تماثل
with respect to the x axis	بالنسبة للمحور x
with respect to the y axis	بالنسبة للمحور y
with respect to the origin	بالنسبة لنقطة المبدأ
System of inequality	نظام متباينات
Tangent line	خط مماس
Triangle inequality	المتباينة المثلثية
Union	اتحاد
Universal set	المجموعة الشاملة
Unbounded interval	فترة غير محدودة
Value	قيمة
Variables	متغيرات

dependent	مرتبطة
independent	مستقلة
Vectors(s)	متجهات
Velocity	سرعة
Volume	حجم
X axis	المحور x
X coordinate	الإحداثية x
X intercept	التقاطع مع المحور x
Xy plane	المستوي xy
Y axis	المحور y
Y coordinate	الإحداثية y
Y intercept	التقاطع مع المحور y
Zero	صفر

المصادر

المصادر الأجنبية

1 • Ellis, R. & Gulick. D, **Calculus With Analytic Geometry**, Second Edition, HBJ, NewYork , 1985.

2 • Salas S.L and Hille. E **Calculus: One and Several Varables**, 7^{th} . Ed ., John Wiley, New York, 1995.

3 • Stain, S.K., **Calculus and Analytic Geometry**, 4^{th}. Ed. Mc Graw- Hill, New York, 1987.

4 • Swokowski, E.W., **Calculus with Analytic Geometry**, 2^{nd} Ed . PWS, Boston, 1979.

المصادر العربية

1 • د.صبري ريف العاني م.د.سعيد محسن الخزاعي ، د.باسل عطا الهاشمي ، **حسبان التفاضل والتكامل** ، مطبعة جامعة بغداد ، 1981.

2 • محمد خير أحمد وعلي حناوي ، **الرياضيات العامة (2)** ، منشورات جامعة حلب، 1997 .

3 • عدنان عوض ، **الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية** ، دار الفرقان ، عمان ، الأردن ، 1991 .

4 • محمد لؤي يحيى ، **الرياضيات (1)** ، منشورات جامعة حلب ، 1999 .

5 • عبد المجيد نصير ، **الشامل في الرياضيات** ، اربد – الأردن ، 1985 .

اسم الكتاب : حساب التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما

اسم المؤلف : صادق عبد العزيز مهدي

التخصص : رياضيات

رقم الإيداع في دار الكتب والوثائق ببغداد ٥٧٢ لسنة ٢٠٠٨